

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 534.222

О ЗВУКОВОМ ПУЧКЕ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ
СО СЛАБО МЕНЯЮЩЕЙСЯ СКОРОСТЬЮ ЗВУКА

Л. К. Зарембо, И. П. Чунгузов

Акустическое поле в ограниченном пучке, распространяющемся в однородной идеальной среде, описывается уравнением Заболотской — Хохлова:

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\epsilon}{c_0^2} v_x \frac{\partial v_x}{\partial \tau} \right) = \frac{c_0}{2} \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right).$$

Здесь x — координата вдоль направления распространения волны, y и z — поперечные координаты, v_x — продольная компонента колебательной скорости, c_0 — скорость звука, $\tau = t - x/c_0$, $\epsilon = (\gamma + 1)/2$, γ — показатель адиабаты. Уравнение (1) было получено в [1] с точностью до членов порядка квадрата числа Маха в предположении о медленности изменения формы возмущения как вдоль направления распространения, так и в поперечном направлении. Можно обобщить это уравнение и его частные решения на случай слабо неоднородной среды, выбрав соответствующим образом независимые переменные в уравнениях гидродинамики. Аналогичная задача рассматривалась в [2].

В данной работе рассматривается звуковой пучок, создаваемый излучателем радиуса r_0 . Ось пучка направлена под произвольным углом θ_0 (фигура) к градиенту скорости звука в среде $c = c(x)$. Скорость распространения «нулей» волны, как известно, с точностью до членов второго порядка равна скорости звука в невозмущенной среде. Поэтому для определения траекторий лучей и локально ортогональных к ним линий равной фазы можно воспользоваться методами линейной геометрической акустики. Рассмотрим для простоты двумерную задачу, выбрав в качестве независимых переменных, как это показано на фигуре, длину луча от начала координат s и ортогональную ей поперечную координату l .

Сделаем преобразование координат: $x = x(s, l)$; $y = y(s, l)$. При этом

$$\mathbf{m} = \left\{ \frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial s} \right\} = \{\cos \theta, \sin \theta\}; \quad \mathbf{n} = \left\{ \frac{\partial x}{\partial l}, \frac{\partial y}{\partial l} \right\} = \{-\sin \theta, \cos \theta\} - \text{единичные}$$

касательные векторы к этим линиям. Учитывая, что в слабо неоднородной среде $\mathbf{m} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s} \approx \frac{\partial(\mathbf{m}\mathbf{v})}{\partial s} = \frac{\partial v_s}{\partial s}$, $\mathbf{n} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial l} \approx \frac{\partial v_l}{\partial l}$ (здесь $v_s = (\mathbf{v}\mathbf{m})$, $v_l = (\mathbf{v}\mathbf{n})$ — проекции вектора колебательной скорости на соответствующие орты), систему уравнений гидродинамики удастся привести к форме, аналогичной виду этой системы в декартовых координатах:

$$(2) \quad \rho \left(\frac{\partial v_s}{\partial t} + v_s \frac{\partial v_s}{\partial s} + v_l \frac{\partial v_s}{\partial l} \right) = - \frac{\partial p}{\partial s}; \quad \rho \left(\frac{\partial v_l}{\partial t} + v_s \frac{\partial v_l}{\partial s} + v_l \frac{\partial v_l}{\partial l} \right) = - \frac{\partial p}{\partial l};$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_s \frac{\partial \rho}{\partial s} + v_l \frac{\partial \rho}{\partial l} + \rho \frac{\partial v_s}{\partial s} + \rho \frac{\partial v_l}{\partial l} = 0; \quad p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma.$$

Вследствие слабой нелинейности, неоднородности и дифракции происходят медленные изменения формы возмущения как вдоль направления распространения пучка, так и поперек. В последнем случае изменения в область тени происходят более быстро [1], поэтому предполагаемое решение имеет вид:

$$(3) \quad \rho', p', v = f(\mu s, \sqrt{\mu} l, \tau).$$

Здесь $\tau = t - \int_0^s \frac{ds}{c}$, μ — малый нелинейный параметр задачи ($\mu \sim v_0/c_0$), ρ', p' — аку-

стические возмущения плотности и давления, характерные масштабы изменения которых в пространстве λ и r_0 малы по сравнению с масштабом неоднородности среды L . Считая, что $\lambda/L \sim \mu$, а поперечная компонента колебательной скорости $v_l \sim \mu \sqrt{\mu}$, можно упростить систему уравнений (2), удержав в ней члены не выше второго порядка малости. Исключая далее в этой системе p' с помощью приближенного уравнения состояния $p' = c^2 \rho' + \frac{\gamma-1}{2\rho_0} c^2 \rho'^2$ а ρ' с помощью линейного соотношения

$\rho' = \rho_0 v_s / c$, получим уравнение для v_s :

$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial v_s}{\partial s} - \frac{\varepsilon}{c^2} v_s \frac{\partial v_s}{\partial \tau} + \frac{v_s}{2c} \frac{\partial c}{\partial s} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (c v_s)}{\partial l^2}.$$

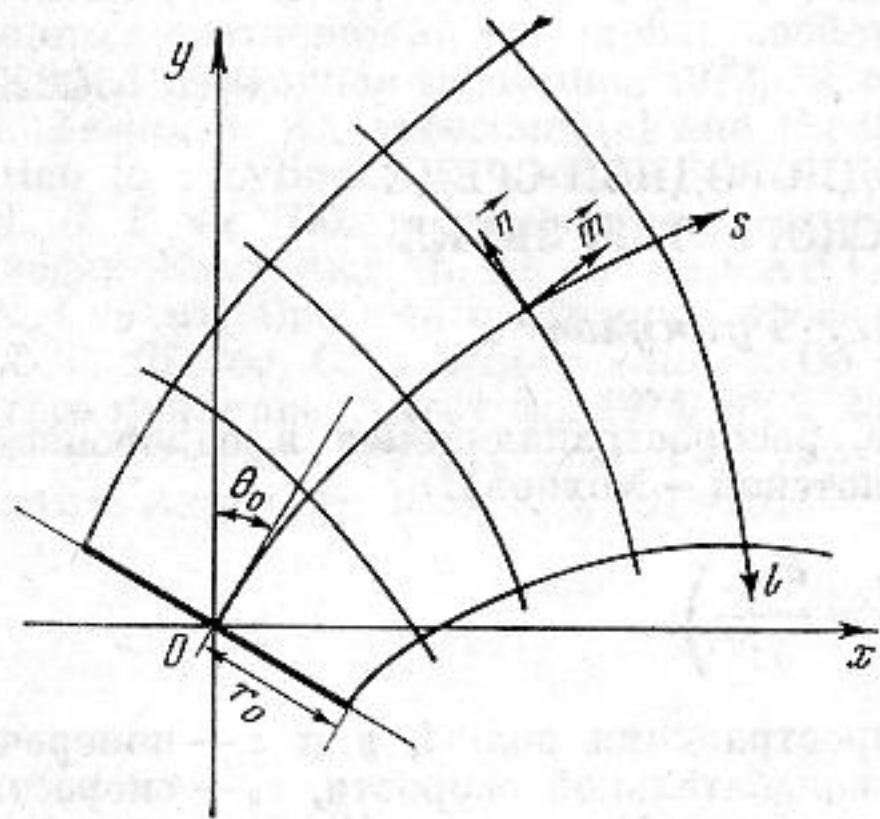
Заменой $u = v_s (c/c_0)^{1/2}$, где c_0 — скорость звука при $s=0$, приведем (4) к виду:

$$(5) \quad \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial u}{\partial s} - \varepsilon u \sqrt{\frac{c_0}{c^5}} \frac{\partial u}{\partial \tau} \right) = \frac{c}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial l^2} + \frac{\partial c}{\partial l} \frac{\partial u}{\partial l}.$$

В предельном случае плоской волны правая часть (5) обращается в нуль и решение имеет вид квазипростой волны (см. [3, 4]):

$$(6) \quad \tau + \varepsilon u \int_0^s \sqrt{\frac{c_0}{c^5}} ds = \varphi(u).$$

Звуковой пучок в неоднородной среде; криволинейные ортогональные координаты s, l



Здесь $\varphi(u)$ — произвольная функция, определяемая профилем возмущения на границе $s=0$. В случае ограниченного пучка ширины r_0 нелинейность среды приводит, помимо искажения профиля возмущения, также к деформации его поперечных размеров [1, 5], которая при $\lambda \ll r_0$ значительно превышает дифракционные эффекты (случай геометрической акустики). Решение (5) при этом должно слабо отличаться от (6), поэтому естественно искать его в виде:

$$(7) \quad \tau = -\varepsilon u \int_0^s \sqrt{\frac{c_0}{c^5}} ds + F(s, l, u),$$

где $F(s, l, u)$ — неизвестная функция, которая при $r_0 \rightarrow \infty$ переходит в $\varphi(u)$. Далее процедура получения уравнения для функции F и его решения аналогична той, которая была проделана в работе [1] для пучка в однородной среде. После подстановки (7) в уравнение (5) получаем в геометро-акустическом приближении $\lambda \ll r_0 \ll L$ уравнение для F :

$$(8) \quad F_{su} + \psi(s, l) F_{ll} = 0,$$

где $\psi(s, l) = \frac{\varepsilon c}{2c_0^2} \int_0^s \sqrt{\frac{c_0^5}{c^5}} ds$ — медленно меняющаяся функция своих аргументов.

В работе [1] на основе решения аналогичного уравнения в однородной среде было показано, что прямоугольный импульс сжатия, локализованный в пространстве в виде параболического пучка, расширяется, а импульс разряжения сужается. Эта, так называемая нелинейная рефракция, приводит к сокращению длительности импульса сжатия и к увеличению длительности импульса разряжения. Слабые неоднородности плавно изменяют амплитуду возмущения v_{s0} ($v_{s0} \sim \sqrt{\frac{c_0}{c}} u_0$, где u_0 — амплитуда возмущения при $l=0, s=0$), что в свою очередь приводит к модуляции «темпа» накопления нелинейных эффектов в пучке, в том числе эффекта нелинейной рефракции.

Рассмотрим частное решение (8), описывающее нелинейную рефракцию однополярных прямоугольных импульсов в неоднородной среде

$$(9) \quad F(s, l, u) = \eta \Phi(\eta) / 2 \left(\eta - u + \alpha \int_0^s \psi ds \right)$$

$$\eta = \left[\left(u + \alpha \int_0^s \psi ds \right)^2 + \alpha l^2 \right]^{1/2} + u - \alpha \int_0^s \psi ds$$

α — произвольный размерный множитель, определяемый из условия при $s=0$. Анализируя (9) в случае, когда $\Phi(\eta)$ (функция, определяемая из условия $s=l=0$) имеет вид прямоугольного импульса сжатия (разряжения), локализованного в виде параболического пучка ширины r_0 при $s=0$, можно прийти к выводу, что ширина пучка растет:

$$(10) \quad r(s) = r_0 \left[1 + \frac{4u_0}{r_0^2} \int_0^s \psi(s', 0) ds' \right]^{1/2}$$

Импульс разряжения сужается в пространстве так, что его ширина

$$(11) \quad r(s) = r_0 \left[1 - \frac{4|u_0|}{r_0^2} \int_0^s \psi(s', 0) ds' \right]^{1/2}$$

В заключение заметим, что используемое при выводе уравнения (4) предположение о медленности изменения формы возмущения становится несправедливым вблизи так называемых «точек поворота» лучевых траекторий и в окрестности каустик, где амплитуда возмущения резко возрастает [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. А. Заболотская, Р. В. Хохлов. Квазиплоские волны в нелинейной акустике ограниченных пучков. Акуст. ж., 1969, 15, 1, 40–47.
2. Е. Н. Пелиновский, И. А. Соустова, В. Е. Фридман. Уравнение Заболотской – Хохлова для ограниченных звуковых пучков в неоднородных средах. Тезисы докладов «Нелинейная гидроакустика – 76», Таганрог, 1976, 22–25.
3. Л. А. Островский. К теории волн в нестационарных сжимаемых средах. ПММ, 1963, 27, 5, 924–929.
4. Л. А. Островский, Е. Н. Пелиновский, В. Е. Фридман. Распространение акустических волн конечной амплитуды в стратифицированном океане. Труды VI Международного симпозиума по нелинейной акустике. Изд-во МГУ, 1976, 342–353.
5. О. В. Руденко, С. И. Солуян. Теоретические основы нелинейной акустики. М., «Наука», 1975.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
физический факультет, кафедра акустики

Поступила
8 июля 1976 г.

УДК 534.222

АВТОДЕТЕКТИРОВАНИЕ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ С БОЛЬШИМИ ЧИСЛАМИ РЕЙНОЛЬДСА

Ю. М. Заславский, А. М. Сутин

Явление автодетектирования мощных акустических волн может иметь место при параметрическом излучении звука [1, 2], а также в высокочастотных акустических системах (например, концентраторах), работающих в импульсном режиме. Автодетектирование при больших числах Рейнольдса рассматривалось в работе [3] для слабомодулированной волны, а в [4, 5] численными методами был исследован спектральный состав модулированной волны в процессе детектирования. Мы рассмотрим автодетектирование бигармонического сигнала с близкими частотами и одиночного волнового пакета. Рассмотрение основано на анализе разрывов, образующихся при больших числах Рейнольдса на каждом высокочастотном периоде волны и позволяет аналитически описать процесс и вычислить спектральные составляющие низкой частоты, которые определяют максимальное значение к.п.д. параметрического излучателя.