АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXII 1976 Вып. 3

УДК 534.222.2

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЯВЛЕНИЯ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ ЗВУКОВЫХ ВОЛН В МАГНИТОУПРУГИХ СРЕДАХ

А. Л. Полякова

Рассмотрены нелинейные явления, возникающие при распространении интенсивной звуковой волны в средах с сильным магнитоупругим взаимодействием. Показано, что нелинейный параметр является функцией намагничения и его величина может значительно превышать его значение за счет чисто упругой нелинейности.

При распространении звуковых волн большой интенсивности проявляются различные нелинейные эффекты, которые приводят к искажению формы волны, появлению высших гармоник, возникновению комбинационных частот и субгармоник и другим явлениям [1]. При распространении в твердом теле причиной возникновения таких эффектов может быть как упругая нелинейность, т. е. отклонения от закона Гука, так и различные эффекты взаимодействия звуковых волн с другими элементарными возбуждениями — электронами, магнонами, спиновыми волнами и т. д. В некоторых случаях эти взаимодействия могут приводить к гораздо большим нелинейным эффектам, чем упругая нелинейность. Так, например, величина нелинейного параметра за счет концентрационной нелинейности в пьезополупроводниках при некоторых условиях может быть на 1—2 порядка больше, чем за счет упругой нелинейности.

Возникает вопрос: какова величина и характер нелинейных явлений в веществах с магнитоупругой нелинейностью? Такими веществами являются большинство ферромагнетиков, обладающих магнитострикцией. Известно, что нелинейные явления в таких веществах весьма существенны при работе мощных магнитострикционных излучателей звука. Цель данной работы — выяснить, какой вклад дают магнитоупругие взаимодействия в нелинейные эффекты, возникающие при распространении упругих волн в средах, обладающих магнитострикцией.

Рассмотрим ферромагнетик, в котором имеется связь между магнитными и упругими переменными, т. е. имеется магнитоупругое взаимодействие. Свободную энергию единицы объема такого вещества при фиксированной температуре можно записать в виде

$$F=F_{м}+F_{у}+F_{му}, \tag{1}$$

где $F_{м}$ — магнитная энергия, $F_{у}$ — упругая энергия, $F_{му}$ — магнитоупругая энергия. Величины $F_{у}$ и $F_{му}$ представим в виде рядов по деформации u_{ij} и квадрату вектора намагничения M_k, причем в этих разложениях ограничимся членами третьего порядка по u_{ij} и M_k^2:

$$F_{м}=(\mathbf{B}-4\pi\mathbf{M})^2/8\pi-\mathbf{M}\mathbf{H}_0+\beta_{ij}^{(ан)}M_iM_j/2, \tag{2}$$

$$F_{у}=C_{ijkl}u_{ij}u_{kl}+C_{ijklmn}u_{ij}u_{kl}u_{mn}, \tag{3}$$

$$F_{му}=a_{ijkl}u_{ij}M_kM_l+b_{ijklmn}u_{ij}M_kM_lM_mM_n+d_{ijklmn}u_{ij}u_{kl}M_mM_n, \tag{4}$$

где $\mathbf{B}$ — магнитная индукция, $\mathbf{H}_0$ — внешнее магнитное поле, u_{ij} — тензор деформации, определяемый выражением (u_i — вектор смещения)

$$u_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \tag{5}$$

C_{ijkl} и C^{*}_{ijklmn} — тензоры упругих констант материала 2-го и 3-го порядка соответственно, a_{ijkl}, b_{ijklmn} и d_{ijklmn} — магнитоупругие константы, $\beta_{ij}^{(ан)}$ — константа анизотропии.

Уравнение движения, описывающее распространение упругой волны в среде, имеет вид

$$\rho_0\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}, \tag{6}$$

где тензор σ_{ik} определяется соотношением [2]

$$\sigma_{ik}=\frac{\partial F}{\partial\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)}. \tag{7}$$

Для достаточно низких частот звуковой волны (меньших, чем частота спиновых волн) изменение намагничения следует за изменением деформации. Поэтому в качестве уравнения, описывающего изменение намагничения в упругой волне, можно взять уравнение магнитостатики

$$\operatorname{div}(\mathbf{H}+4\pi\mathbf{M})=0, \tag{8}$$

где $\mathbf{H}$ — внутреннее магнитное поле, создаваемое в веществе магнитными моментами атомов, равное

$$\mathbf{H}=4\pi\left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{B}}\right)_{u,T}. \tag{9}$$

Выражая свободную энергию (1) через вектор $\mathbf{B}$ по формуле $\mathbf{B}=\mathbf{H}+4\pi\mathbf{M}$ и используя (9), получим для внутреннего магнитного поля

$$H_i=H_{0i}+\beta_{ik}^{(ан)}M_k+2a_{jkli}u_{jk}M_l+b_{jkmlni}u_{jk}M_mM_lM_n+d_{jklmni}u_{jk}u_{lm}M_n. \tag{10}$$

Выписанные уравнения описывают распространение упругой волны в среде с магнитоупругим взаимодействием с учетом членов высшего порядка как по упругим, так и по магнитным величинам. Рассмотрим для простоты распространение плоской продольной волны в изотропной среде без поглощения. Пусть волна распространяется вдоль оси x, тогда отличны от нуля смещение $u_x(x,t)$ и компонента вектора намагничения $M_x(x,t)$. Уравнения (6) и (8) с учетом квадратичных членов можно привести к виду

$$\rho_0\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}-\alpha\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}=\beta\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}\frac{\partial u_x}{\partial x}+ \tag{11}$$
$$+a_1\frac{\partial M_x^2}{\partial x}+d_1\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}M_x^2\right)+b_1\frac{\partial M_x^4}{\partial x},$$

$$2a_1\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}M_x\right)+4b_1\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}M_x^3\right)+ \tag{12}$$
$$+2d_1\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2M_x\right]+4\pi\frac{\partial M_x}{\partial x}=0,$$

где $\alpha=\dfrac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, β – комбинация упругих модулей третьего порядка A, B, C для изотропного тела [2] $\beta=3\alpha+2(A+3B+C)$. Граничное условие при $x=0$ имеет вид

$$u_x=U_1e^{i\omega t}. \tag{13}$$

Ищем решение уравнений (11), (12) методом последовательных приближений. Представим u_x и M_x в виде суммы двух гармонических волн с частотами ω и 2ω:

$$\begin{aligned} u_x&=U_1\exp i(\omega t-kx)+U_2(x)\exp 2i(\omega t-kx)+\text{к.с.}\\ M_x&=M_0+M_1\exp i(\omega t-kx)+M_2(x)\exp 2i(\omega t-kx)+\text{к.с.}\end{aligned} \tag{14}$$

Из решения уравнений в первом приближении получаем соотношение между частотой и волновым вектором такой волны

$$\rho_0\omega^2=k^2\left[\alpha+\left(d_1-\frac{a_1^2}{\pi}\right)M_0^2\right]. \tag{15}$$

Величина M_0 определяется кривой намагничения данного материала и связана с величиной внешнего магнитного поля H_0. Из соотношения (15) видно, что комбинация магнитоупругих констант $D=d_1-\dfrac{a_1^2}{\pi}$ связана с величиной изменения упругого модуля материала под действием магнитного поля, т. е. с величиной ΔE-эффекта. Соотношение между амплитудами U_1 и M_1 имеет вид

$$M_1=\frac{ik}{2\pi}a_1M_0U_1. \tag{16}$$

Для нахождения амплитуды второй гармоники считаем амплитуду U_2 медленно меняющейся функцией координат, т. е. $\left|\dfrac{d^2U_2}{dx^2}\right|\ll k\left|\dfrac{dU_2}{dx}\right|$. Тогда из уравнения (11) с учетом квадратичных членов получим для U_2

$$\alpha\frac{dU_2}{dx}=k^2U_1^2\left[\beta+\frac{a_1M_0^2}{\pi}\left(\frac{3a_1^2}{2\pi}-4d_1\right)\right]. \tag{17}$$

Его решение

$$U_2=k^2\Gamma U_1^2x, \tag{18}$$

где

$$\Gamma=\frac{\beta}{\alpha}-\frac{a_1M_0^2}{\pi\alpha}\left(4D+\frac{5}{2}\frac{a_1^2}{\pi}\right). \tag{19}$$

Амплитуда второй гармоники намагничения определяется соотношением

$$M_2=\frac{U_1^2k^2}{2\pi}M_0\left(d_1-\frac{a_1^2}{2\pi}+\frac{2ika_1}{\alpha}\Gamma x\right).$$

Величина M_2, в отличие от U_2, не равна нулю при $x=0$ вследствие квадратичной зависимости u_{ij} от M. Из полученных соотношений видно, что нелинейный параметр Г, который при $M_0=0$ равен величине β/α, т. е. обычному значению нелинейного параметра за счет упругой нелинейности, зависит от намагничения. Поскольку в большинстве материалов, в частности

в металлах, величина β/α отрицательна [1], абсолютная величина нелинейного параметра растет с ростом намагничения как M_0^2. Если же величина β/α положительна, то с ростом намагничения нелинейный параметр убывает. Решение (18), как обычно в методе последовательных приближений, справедливо на малых расстояниях от границы $x=0$, т. е. до тех пор, пока $U_2 \ll U_1$ и в разложении (14) можно пользоваться двумя членами, отбрасывая высшие гармоники.

Для оценки величины нелинейного параметра в намагниченной среде нужно знать магнитоупругие константы a_1 и d_1, которые обычно неизвестны. Для оценки величины a_1 можно воспользоваться экспериментальными данными для магнитострикционной константы. Можно показать, что $a_1 = \frac{2\pi}{M_c} a_{эк}$, где $a_{эк} = \frac{\partial \sigma_1}{\partial M_1}$ — экспериментальное значение магнитострикционной константы, измеренной при малых амплитудах при значении статической намагниченности, равной M_0 [3] (σ_1 — амплитуда магнитострикционного напряжения, B_1 — амплитуда переменной индукции). Величину D можно оценить из данных по зависимости величины ΔE-эффекта от M при малых значениях намагниченности.

В самом деле, можно показать, что $D \approx \frac{\alpha}{M_0^2} \frac{\Delta E}{E_0}$; здесь M_0 — то значение намагничения, при котором измерена величина $\Delta E/E_0$.

Оценка величины D для ферритов по данным [4] дает $D \approx 10^8$, а величина $a_1 = 6{,}4 \cdot 10^2$. Тогда видно, что в формуле $d_1 = D + a_1^2/\pi$ второй член гораздо меньше, чем первый, и $d_1 \approx D$. В этом случае нелинейный параметр

$$\Gamma \approx \frac{\beta}{\alpha} - \frac{4a_1 D}{\pi\alpha} M_0^2.$$

Для значений $a_1 = 6{,}4 \cdot 10^2$, $D \approx 10^8$, $\alpha = 1{,}35 E_0$, $E_0 = 1{,}76 \cdot 10^{12}$ *дин/см*^{2} получим

$$\Gamma \simeq \frac{\beta}{\alpha} - 3{,}4 \cdot 10^{-2} M_0^2.$$

Поскольку данных по β/α для ферритов нет, воспользуемся данными для железа $\beta/\alpha = -15$. В этом случае увеличение M_0 приводит к росту абсолютной величины Г. При $M_0 = 100$ *гс* имеем $\Gamma \approx -350$, т. е. нелинейный параметр оказывается на порядок большим, чем при упругой нелинейности.

Если величина ΔE-эффекта в материале мала, то вклад в нелинейный параметр за счет намагничения также будет малым.

Для поперечной волны, в которой отличны от нуля составляющие смещения u_y и u_z, уравнение движения будет иметь вид

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} = \gamma \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + 2a_2 \frac{\partial}{\partial x} (M_x M_y),$$

где $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$, $\gamma = \alpha + \frac{A}{2} + B$, a_2 — магнитоупругая константа. Из этого уравнения видно, что члены с магнитными переменными не меняют качественно поведения второй гармоники поперечной волны по сравнению со случаем упругой нелинейности. В самом деле, если продольных смещений нет ($u_x = 0$ и $M_x = 0$), уравнение для u_y оказывается линейным, т. е. не может быть 2-й гармоники в чисто поперечной волне.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. К. Зарембо, В. А. Красильников.* Введение в нелинейную акустику. М., «Наука», 1966.
2. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.* Теория упругости. М., «Наука», 1965.
3. *L. Ganeva, I. Golyamina, A. Polyakova.* Nonlinear effects in highpower magnetostrictive transducers. Proc. of VIII International Congress on Acoustics, London, 1974.
4. *И. П. Голямина, В. К. Чулкова.* Зависимость модуля Юнга и механической добротности магнитострикционных ферритов от подмагничения. Акуст. ж., 1966, *12*, 4, 428—434.

Акустический институт
Академии наук СССР

Поступила
16 мая 1975 г.