

АКУСТИЧЕСКИЕ КРОМОЧНЫЕ ВОЛНЫ В ИЗОТРОПНЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

В. С. Бондаренко, В. Ф. Дубовицкий

Рассмотрим возможность существования в изотропных твердых телах акустической волны, распространяющейся по кромке, образуемой пересечением двух ортогональных граней твердого тела и локализуемой в непосредственной близости от этой кромки.

Для решения этой задачи ограничимся рассмотрением упругого изотропного твердого тела, ограниченного плоскостями $x=|0$, $y=|0$. Ось z совместим с кромкой, образованной пересечением этих плоскостей, а направление осей x и y выберем таким образом, чтобы для твердого тела выполнялись соотношения: $x < |0$ и $y < |0$. В предположении отсутствия объемных сил уравнения движения твердой среды можно написать в виде [1]:

$$(1) \quad \ddot{u}_\alpha - c_\alpha^2 \Delta u_\alpha = 0.$$

Здесь u_α означает какую-либо из компонент u_x , u_y или u_z , векторов смещения \mathbf{u}_i или \mathbf{u}_t , а c_α — соответствующие вектору смещения скорости продольной c_l или поперечной c_t волн.

Для монохроматической волны, распространяющейся по оси z и затухающей с глубиной на обеих гранях, образующих кромку, решение будем искать в виде:

$$(2) \quad u = \text{const} \exp \{i(kz - \omega t)\} f(x, y)$$

Подставляя это решение в уравнение (1), получим дифференциальное уравнение

$$(3) \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_\alpha^2} \right) f(x, y).$$

Примем частное решение уравнения (3) в виде:

$$f(x, y) = X(x) Y(y).$$

Подстановка этого выражения в уравнение (3) даст два однородных уравнения

$$(4a) \quad X''(x) - \lambda_\alpha^2 X(x) = 0 \quad (4b) \quad Y''(y) - \mu_\alpha^2 Y(y) = 0.$$

Здесь λ_α и μ_α — постоянные, связанные соотношением

$$(5) \quad \lambda_\alpha^2 + \mu_\alpha^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c_\alpha^2}.$$

Из дифференциальных уравнений (4) нетрудно получить выражения для $X(x)$ и $Y(y)$, удовлетворяющие условию необходимости ограничения полей (или стремления их к нулю) [2], когда $x \rightarrow \infty$, $y \rightarrow \infty$. Эти выражения имеют вид

$$(6) \quad X(x) = \text{const} \exp(\lambda_\alpha x), \quad Y(y) = \text{const}(\mu_\alpha y).$$

Для того, чтобы волны с амплитудами, описываемыми равенствами (6), затухали соответственно по осям x и y , необходимо выполнение неравенств $\lambda_\alpha > |0$, $\mu_\alpha > |0$.

Следует отметить, что каждое из полученных выражений (6) имеет вид решения, описывающего поверхностную волну на соответственной грани. Так как полное решение уравнения (1) определяется произведением частных решений (6), имеем

$$(7) \quad u_\alpha = \text{const} \exp \{i(kz - \omega t) + \lambda_\alpha x + \mu_\alpha y\},$$

где λ_α и μ_α — скорости ослабления, определяющие зону эффективного распространения акустических кромочных волн. Экспоненциальный характер затухания волн вдоль каждой из граней, образующих кромку, обеспечивает локализацию энергии кромочных волн в непосредственной близости от кромки.

Истинный вектор смещения должен быть определенной комбинацией векторов \mathbf{u}_i и \mathbf{u}_t . Для нахождения этой комбинации ограничимся рассмотрением случая отсутствия механических напряжений на кромке [3], положив

$$(8) \quad T_{1i} = T_{2j} = 0 \text{ при } x=0, y=0, \\ i, j=1, 2, 3$$

Независимое выполнение этого требования, а также использование известных соотношений $\text{rot} \mathbf{u}_i = |0$, $\text{div} \mathbf{u}_i = |0$ после несложных алгебраических операций приво-

дят к следующей зависимости между скоростями затухания компонент векторов смещения u_l и u_t :

$$\lambda_\alpha = \mu_\alpha = 2^{-1/2} (k^2 - \omega^2 / c_\alpha^2)$$

и к дисперсионному уравнению вида

$$k^2 \lambda_t = \lambda_l (0,5k^2 + \lambda_l^2).$$

Тривиальное решение последнего уравнения приводит к фазовой скорости акустической кромочной волны, определяемой равенством

$$(9) \quad c_k = c_l \left\{ \frac{c_l^2}{2c_l^2} + 2 \left[\left(\frac{c_l^2}{2c_l^2} + 2 \right)^2 - 4 \right]^{1/2} \right\}^{1/2}.$$

Как видно из (9) акустические кромочные волны являются бездисперсионными. Компоненты смещения кромочных волн, распространяющихся по ортогональным граням, определяются следующими соотношениями

$$(10) \quad u_x = u_y = u_{lx} + u_{tx} = -ia \frac{\omega}{\sqrt{2} c_k} \left[\left(1 - \frac{c_k^2}{c_l^2} \right) \times \right. \\ \times \exp \left\{ \frac{\omega}{\sqrt{2} c_k} \left(1 - \frac{c_k^2}{c_l^2} \right)^{1/2} (x+y) \right\} - \left(1 - \frac{c_k^2}{c_l^2} \right)^{-1/2} \times \\ \left. \times \left(1 - \frac{c_k^2}{c_l^2} \right) \exp \left\{ \frac{\omega}{\sqrt{2} c_k} \left(1 - \frac{c_k^2}{c_l^2} \right)^{1/2} (x+y) \right\} \right] \exp \left\{ i\omega \left(\frac{z}{c_k} - t \right) \right\},$$

$$(11) \quad u_z = u_{lz} + u_{tz} = \frac{a\omega}{c_k} \left[\exp \left(\frac{\omega}{\sqrt{2} c_k} \left(1 - \frac{c_k^2}{c_l^2} \right)^{1/2} (x+y) \right) - \right. \\ \left. - \left(1 - \frac{c_k^2}{c_l^2} \right) \exp \left\{ \frac{\omega}{\sqrt{2} c_k} \left(1 - \frac{c_k^2}{c_l^2} \right)^{1/2} (x+y) \right\} \right] \exp \left\{ i\omega \left(\frac{z}{c_k} - t \right) \right\},$$

где a — произвольная постоянная.

Таким образом, акустические кромочные волны, распространяющиеся по кромке, образованной пересечением ортогональных граней изотропного твердого тела, со скоростью, определяемой выражением (9) и скоростями затухания на гранях

$$\lambda_l = \frac{\omega}{\sqrt{2} c_k} \left(1 - \frac{c_k^2}{c_l^2} \right)^{1/2}; \quad \lambda_t = \frac{\omega}{\sqrt{2} c_k} \left(1 - \frac{c_k^2}{c_l^2} \right)^{1/2},$$

полностью определяются выражениями (10) и (11) с точностью до постоянного множителя.

Заметим, что каждое из уравнений (4), рассматриваемое для соответственного полупространства, дает решение в виде чистой релеевской волны. Поэтому можно ожидать получения акустических кромочных волн как результата комбинации двух поверхностных волн, распространяющихся по ортогональным плоскостям в непосредственной близости от линии пересечения этих плоскостей. Вполне естественно ожидать существование кромочных волн в пьезоэлектрических кристаллах с определенной ориентацией пересекающихся граней. Следовательно, имеется реальная возможность возбуждения и приема таких волн преобразователями со встречно-штыревой структурой электродов, нанесенными на пьезоэлектрические материалы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теория упругости, М.: «Наука», 1965, 139.
2. J. J. Campbell, W. R. Jones. A method for Estimating Optimal Crystals Cuts and Propagation Direction for Excitation of Piezoelectric Surface Waves. IEEE Trans., SU-15, 1968, 4, 209-217.
3. С. П. Тимошенко. Курс теории упругости, Киев, «Наукова думка», 1972, 24.

Поступила
6 марта 1975 г.