АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXII 1976 Вып. 2

УДК 534.29

О СУБГАРМОНИЧЕСКОЙ КОМПОНЕНТЕ КАВИТАЦИОННОГО ШУМА

Т. А. Дунина, К. А. Наугольных, С. А. Рыбак

Рассмотрено теоретически параметрическое возбуждение пульсаций пузырька. Если резонансная частота пузырька близка к половине частоты падающей волны, то вынужденные колебания пузырька становятся неустойчивыми; полоса частот, соответствующая области неустойчивости, возрастает с увеличением амплитуды падающей волны, причем максимальный инкремент возмущения соответствует возбуждению субгармонический компоненты. Определена амплитуда объемных пульсаций на субгармонике и амплитуда звуковой волны, излучаемой на этой частоте при заданном расстоянии до точки наблюдения.

Согласно экспериментальным данным, в спектре шума ультразвуковой кавитации имеются дискретные компоненты как в области высоких, так и в области низких частот по отношению к частоте возбуждающего поля. Характерной чертой низкочастотных компонент и, в частности, сигнала на субгармонике является то, что их возникновение носит пороговый характер, в то время как гармоники высших порядков существуют при любом значении внешнего поля. В последнее время большое внимание было уделено изучению природы первой субгармоники сигнала основной частоты [1].

Существует несколько гипотез относительно происхождения субгармонической компоненты кавитационного шума. Наиболее правдоподобной, на наш взгляд, является гипотеза о параметрическом возбуждении собственных колебаний пузырька, частота которых равна половине частоты возбуждения. Это явление было рассмотрено Флинном [2]. Методом возмущений было найдено периодическое решение уравнения для радиуса сферического пузыря, возбуждаемого внешним синусоидальным полем. Были определены условия, при которых это решение является неустойчивым и происходит параметрическое возбуждение пульсаций пузырька на частотах, близких к частоте субгармоники.

В этой работе, однако, не была определена амплитуда возбуждаемых пульсаций. Наша цель состоит в том, чтобы из условий стабилизации определить амплитуду субгармонических колебаний.

Рассмотрим одиночный сферический пузырек в жидкости. Пренебрегая поверхностным натяжением и изменением формы пузырька, движение стенок пузырька в приближении несжимаемой жидкости можно описать уравненем Рэлея

$$R\ddot{R}+\frac{3}{2}\dot{R}^2=\frac{1}{\rho_0}(P_г-P_0).$$

Для объема пузырька это уравнение преобразуется в следующее:

$$av^{-1/3}\ddot{v}-\frac{a}{6}v^{-4/3}\dot{v}^2=P_г-P_0, \tag{1}$$

где R — текущий радиус пузырька, ρ_0 — плотность жидкости, $P_г$ — давление внутри пузырька, P_0 — внешнее давление, v — объем пузырька, равный $^4/_3\pi R^3$, v_0 — его равновесное зачение, $a=\rho_0 3^{-1/3}(4\pi)^{-2/3}$.

Пренебрегая теплообменом между пузырьком и окружающей средой, т. е. считая процесс изменения состояния газа адиабатическим, $P_г=P_0\left(\frac{v_0}{v}\right)^\gamma$, получаем, что отклонение радиуса пузырька от его равновесного значения, а следовательно, и изменения давления в нем малы, т. е. $v=v_0+v'$, $P=P_0+P'$, $\frac{v'}{v_0}\ll 1$, $\frac{P'}{P_0}\ll 1$. Сохраняя кубические члены по v'/v_0, мы получим из формулы (1) уравнение вида

$$\ddot{v}+\omega_0^2 v-\alpha v^2-\beta(2\ddot{v}v+\dot{v}^2)+\xi v(2\ddot{v}v+v^2)+\chi v^3=-\varepsilon P, \tag{2}$$

где

$$\omega_0^2=3\gamma P_0/\rho_0 R_0^2,\quad \alpha=9\gamma(\gamma+1)P_0/8\pi\rho_0 R_0^5,$$
$$\beta=1/8\pi R_0^3,\quad \xi=1/8\pi^2 R_0^6,$$
$$\chi=9\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)P_0/2\rho_0(4\pi)^2 R_0^8,\quad \varepsilon=4\pi R_0/\rho_0.$$

В линейном приближении уравнение (2), описывающее пульсации пузырька под действием вынуждающей силы $P=P_a e^{i\omega t}+$к.с., как известно, имеет решение

$$v_0=A_0 e^{i\omega t}+\text{к. с.},\quad A_0=-\frac{\varepsilon P_a}{\omega_0^2-\omega^2}. \tag{3}$$

Точное решение уравнения (2) U является периодическим, но не гармоническим, так как наряду с членами, соответствующими колебаниям на основной частоте, появляются члены, отвечающие ее гармоникам. Не представляя это решение в явном виде, исследуем его на устойчивость обычным способом. Для этого наложим на решение U малое возмущение

$$v_1=B_1 e^{i\omega_1 t}+B_2 e^{-i\omega_1 t}, \tag{4}$$

$$\omega_1=\frac{\omega}{2},$$

считая B_1 и B_2 медленно изменяющимися амплитудами вида $B_1=b_1 e^{ip_1 t}$, $B_2=b_2 e^{ip_2 t}$. Решение в виде

$$v=U+v_1 \tag{5}$$

мы подставим в уравнение (2), написанное с точностью до квадратичных членов, и, приравнивая члены с одинаковыми показателями степени при экспонентах, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} -\omega p_1 b_1 e^{ip_1 t}+\left(\omega_0^2-\frac{\omega^2}{4}\right)b_1 e^{ip_1 t}-2b_2 e^{ip_2 t}A_0\left(\alpha-\frac{3}{4}\beta\omega^2\right)=0, \\ -\omega p_2 b_2 e^{ip_2 t}-\left(\omega_0^2-\frac{\omega^2}{4}\right)b_2 e^{ip_2 t}+2b_1 e^{ip_1 t}A_0+\left(\alpha-\frac{3}{4}\beta\omega^2\right)=0. \end{cases} \tag{6}$$

Приравнивая показатели степени при экспонентах, получим, что в рассматриваемом случае $p_1=p_2=p$.

Чтобы эта система имела решение, необходимо, чтобы ее детерминант был равен нулю; отсюда

$$p=\pm\frac{1}{\omega}\sqrt{\left(\omega_0^2-\frac{\omega^2}{4}\right)^2-4|A_0|^2\left(\alpha-\frac{3}{4}\beta\omega^2\right)^2}. \tag{7}$$

Рассмотрим подкоренное выражение. При фиксированной частоте внешнего воздействия ω всегда найдется такое значение амплитуды A_0, при котором подкоренное выражение станет отрицательным; следовательно, p станет мнимым и возмущения v_1 будут нарастать. Инкремент будет максимальным при $\omega_0 = \frac{\omega}{2}$, что соответствует колебаниям пузырька на частоте, равной субгармонике основной частоты. В этом случае при $\gamma = \frac{4}{3}$

$$p = \frac{\omega}{24} P, \quad P = \frac{P_a}{P_0}, \tag{8}$$

где P_a — амплитуда внешнего возмущения, P_0 — гидростатическое давление, а $v_1 = be^{\frac{P}{12} \cdot \frac{\omega}{2} t}$. Это согласуется с результатами работы [2]. Зметим, что учет затухания приведет к наличию порога неустойчивости [2].

Если амплитуду A_0 считать постоянной, то можно определить полосу частот $2\Delta\Omega$, в которой колебания будут нарастать, а следовательно, и решение v уравнения (2) будет неустойчивым. Полоса частот, соответствующая области неустойчивости, простирается от $\omega_0 - \Delta\Omega$ до $\omega_0 + \Delta\Omega$, где

$$\Delta\Omega \approx A_0 (3\beta\omega_0^2 - \alpha)/\omega_0. \tag{9}$$

Далее определим установившуюся амплитуду колебаний пузырька на субгармонике вынуждающей силы. Для этого в уравнении движения необходимо сохранить кубичные члены, т. е. решить уравнение (2). Аналогичная задача для колебательной системы, описываемой уравнением

$$\ddot{X} + 2\lambda\dot{X} + \omega_0^2 X = \frac{f}{m} \cos \omega t - \delta X^2 - \chi X^3, \tag{10}$$

где λ — коэффициент трения, ω_0 — частота собственных колебаний, f — внешняя периодическая сила с частотой ω, m — масса, δ, χ — коэффициенты при нелинейных членах, рассмотрена в книге [3].

Устойчивое решение этого уравнения при постоянной амплитуде имеет вид

$$B^2 = \frac{1}{\varkappa} \left[\frac{\Delta\omega}{2} + \sqrt{\left(\frac{\delta f}{6m\omega_0^3}\right)^2 - \lambda^2} \right], \tag{11}$$

где $\varkappa$ — коэффициент ангармоничности, характеризующий сдвиг частоты собственных колебаний, $\Delta\omega = \omega - 2\omega_0$.

Уравнение (2) отличается от уравнения (10) наличием нелинейных инерционных членов. Тем не менее решение уравнения (2) можно получить на основе выражения (11), если вычислить значение коэффициентов δ и $\varkappa$ для нашего уравнения. Для этого в соответствии с процедурой метода последовательных приближений в правую часть нелинейного уравнения следует подставить его решение в линейном приближении. Собирая квадратичные члены, мы получим выражение $\delta = \alpha - 3\beta\omega_0^2$.

Для определения $\varkappa$ заметим следующее. Наличие нелинейных членов в уравнении движения приводит к зависимости собственной частоты колебания пузырька от амплитуды B, которая может быть представлена в виде $\omega_0 + \varkappa B^2$, где $\varkappa$ в нашем случае определяется выражением

$$\varkappa = \frac{3(\chi + 3\zeta\omega_0^2)}{8\omega_0} - \frac{5(\alpha - 3\beta\omega_0^2)^2}{12\omega_0^3}. \tag{12}$$

Учитывая, что $f/m=\varepsilon P_a$, мы получим устойчивое решение при постоянной амплитуде:

$$B^2=\frac{1}{\frac{3}{8}\frac{(\chi+3\zeta\omega_0^2)}{\omega_0}-\frac{5}{12}\frac{(\alpha-3\beta\omega_0^2)^2}{\omega_0^3}}\times$$

$$\times\left\{\frac{\Delta\omega}{2}+\sqrt{\left[\frac{(\alpha-3\beta\omega_0^2)\varepsilon P_a}{6\omega_0^3}\right]^2-\left(\frac{\Lambda}{\pi}\right)^2}\right\}$$

где Λ — логарифмический декремент затухания собственных колебаний пузырька.

Подставляя в эту формулу значение входящих в нее параметров, при $\Lambda=0$ и $\Delta\omega=0$ получим выражение для амплитуды объемных пульсаций пузырька на субгармонике вынуждающей силы:

$$B=2v_0\sqrt{\frac{P}{[9\gamma-2\gamma^2+18]}}. \tag{13}$$

Пульсации пузырьков приводят к излучению звуковой волны с амплитудой звукового давления

$$P_{\frac{\omega}{2}}=\rho\frac{\omega_0^2 v_0}{2\pi r}\sqrt{\frac{P}{9\gamma-2\gamma^2+18}}, \tag{14}$$

где r — расстояние от центра пульсирующего пузырька до точки наблюдения.

В заключение приведем численную оценку отношения стабильной амплитуды на субгармонике к равновесному объему пузырька. Так, при $\gamma=4/3$, $P=1$ и $B/v_0\approx0{,}4$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *A. Mosse, R. D. Finch.* Spectral Analysis of Cavitation in Cryogenic Liquids, 1971, *49*, 1 (part 2), 156–165.
2. *A. J. Eller, H. G. Flynn.* Generation of Subharmonics of Order One – Half by Bubdles in a Sound Field. J. Acoust. Soc. America, 1969, *46*, 3, part 2, 722–727.
3. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.* Механика, М., Физматгиз, 1958.

Акустический институт
Академии наук СССР

Поступила
9 сентября 1974 г.