В этом случае при малых μ зависимость ВП$_V$ от β_2 качественно та же, что и в случае возбуждения пластины в режиме заданной силы (фиг. 1, *б*). При больших μ экстремальные значения эффективности смещаются в сторону малых значений β_2, а для $\mu>0,8$ наибольшие значения эффективности соответствуют $\beta_2=0$, т. е. однослойное покрытие в этом случае оказывается более эффективным, чем двухслойное (фиг. 2). Таким образом, при возбуждении колебаний с заданной скоростью область эффективного использования промежуточного слоя ограничена, и, кроме того, величина эффективности двухслойного покрытия не может быть больше максимальной эффективности однослойного покрытия ($\beta_{2\,опт}=0$).

Учет рассмотренных закономерностей в зависимости от режима возбуждения и веса наносимого покрытия позволяет выбирать оптимальное соотношение толщин слоев покрытия, обеспечивающее наибольшее снижение уровня вибраций. Если же задана требуемая величина снижения уровня вибраций, найденные закономерности могут быть использованы для выбора необходимого покрытия с минимальным весом.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. И. Наумкина, Б. Д. Тартаковский, М. М. Эфрусси.* Двухслойная вибропоглощающая конструкция. Акуст. ж., 1959, *5*, 4, 498—501.
2. *Л. П. Борисов, Б. А. Канаев, С. А. Рыбак, Б. Д. Тартаковский.* О критериях оценки эффективности вибропоглощающих покрытий. Акуст. ж., 1974, *20*, 3, 352—359.
3. *Б. Д. Тартаковский.* Изгибно-продольные колебания составных стержней, состоящих из жестких слоев. В кн.: Вибрации и шумы, М., «Наука», 1969.

Акустический институт
Академии наук СССР

Поступила
12 февраля 1975 г.

УДК 534.874.3

ИЗЛУЧЕНИЕ ЗВУКА ЛИНЕЙНЫМ ВИХРЕМ НАД ПЛОСКОСТЬЮ С РЕБРОМ

С. Г. Касоев

В работе [1] рассмотрена генерация звука элементарным вихрем при огибании края полубесконечного жесткого экрана. Настоящая работа посвящена исследованию взаимодействия линейного вихря с тонким ребром на плоской жесткой поверхности в слабосжимаемой жидкости.

В комплексной плоскости $Z=X+iY$ задана граница $Y=0$ с ребром $X=0$, $Y\leqslant h$. На всей границе скорость жидкости обращается в нуль. На большом расстоянии от начала координат $X<0$ генерируется линейный вихрь силы Γ, параллельный ребру на плоскости.

Рассмотрим движение вихря над данной границей, считая жидкость несжимаемой. Конформное отображение $W^2=Z^2+h^2$ переводит заданную область в полупространство с жесткой границей, поэтому комплексный потенциал скорости вихря в плоскости Z получается с помощью этого преобразования из потенциала для полупространства с жесткой границей

$$\Omega=\frac{i\Gamma}{2\pi}\ln\frac{\sqrt{Z^2+h^2}-\sqrt{Z_0^2+h^2}}{\sqrt{Z^2+h^2}-\sqrt{\overline{Z}_0{}^2+h^2}},\tag{1}$$

где Z_0 — центр вихря.

Производная потенциала (1) является величиной комплексно-сопряженной скорости потока. Если рассмотреть эту скорость вблизи центра вихря, то можно определить скорость сноса вихря потоком:

$$\Omega'(Z_0+\varepsilon)=\frac{i\Gamma}{2\pi}\frac{Z_0}{\sqrt{Z_0^2+h^2}}\frac{1}{\sqrt{Z_0^2+h^2}-\sqrt{\overline{Z}_0{}^2+h^2}}+$$
$$+\frac{i\Gamma}{2\pi}\frac{h^2}{2Z_0(Z_0^2+h^2)}-\frac{i\Gamma}{2\pi}\frac{1}{\varepsilon}+0(\varepsilon).$$

Член, пропорциональный $1/\varepsilon$, представляет собой скорость вихревого движения с центром Z_0, член нулевого порядка по ε является комплексно-сопряженной скоростью движения центра вихря. Разделив действительную и мнимую части этой скорости, можно найти систему двух уравнений для определения траектории вихря.

Будем считать высоту ребра малой, по сравнению с высотой траекторий над границей, при этом выражение для скоростей по координатам X и Y можно разложить в ряд по степеням малой величины h/Y_0 и ограничиться членами второго порядка:

$$\frac{dX_0}{dt} = \frac{\Gamma}{4\pi Y_0} + \frac{\Gamma}{4\pi Y_0} 4h^2 \frac{X_0{}^2 Y_0{}^2}{(X_0{}^2+Y_0{}^2)^3},$$

$$\frac{dY_0}{dt} = -\frac{\Gamma}{4\pi Y_0} 8h^2 \frac{Y_0' X_0{}^3 - X_0 Y_0{}^3}{(X_0{}^2+Y_0{}^2)^3}.$$

Считая высоту ребра малой, можно разделить координаты центра вихря на невозмущенную и возмущенную части: $X_0=X_0'+X_0''$, $Y_0=Y_0'+Y_0''$. Для слабого возмущения траектории координаты мало отличаются от невозмущенных, поэтому возмущение скорости можно рассматривать приближенно:

$$\frac{dX_0''}{dt} = V_0 4h^2 \frac{a^2 (V_0 t)^2}{[(V_0 t)^2+a^2]^3}; \qquad \frac{dY_0''}{dt} = -V_0 4h^2 a \frac{(V_0 t)^3 - V_0 t a}{[(V_0 t)^2+a^2]^3},$$

где $V_0 = \dfrac{\Gamma}{4\pi a}$, $a=Y_0'$. Интегрирование по времени дает зависимость координат центра вихря от времени:

$$X_0 = V_0 t - h^2 a^2 \left\{ \frac{V_0 t}{[(V_0 t)^2+a^2]^2} - \frac{V_0 t}{2a^2[(V_0 t)^2+a^2]} + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{V_0 t}{a} \right\}, \tag{2}$$

$$Y_0 = a + 2h^2 \frac{a (V_0 t)^2}{[(V_0 t)^2+a^2]^2}.$$

Из выражения (2) следует, что над ребром вихрь испытывает вертикальное и горизонтальное ускорение, поэтому он будет излучать звук в слабосжимаемой жидкости. Излучение звука происходит за время a/V_0, за которое акустическое возмущение распространится в области радиуса a/M с центром в начале координат (M – число Маха). Для нахождения звукового потенциала в волновой зоне применим метод сращивания асимптотических разложений [2]. Введем два набора координат: внутренние (X, Y) и внешние (x, y), связанные соотношением $(x, y)=(MX, MY)$, тогда волновое уравнение во внешних координатах для фиксированных (x, y) и $M\to 0$ примет вид

$$\left(\frac{1}{V_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x \right) \Phi = 0. \tag{3}$$

Для фиксированных (X, Y) и $M\to 0$ волновое уравнение перейдет в уравнение Лапласа

$$\Delta_X \Phi = 0. \tag{4}$$

Решение уравнения (4) является действительной частью комплексного потенциала (1). Во внешних координатах это решение имеет вид

$$\Phi \left(\frac{x}{M}, \frac{y}{M} \right) = \Phi(r, \theta) = -\frac{\Gamma}{\pi} M \frac{\sin\theta}{r} Y_0. \tag{5}$$

Решение волнового уравнения (3) после перехода к спектральному представлению легко записать в виде ряда по функциям Ханкеля первого рода $H_n^{(1)}$:

$$\tilde{\Phi} = \sum_{n=1}^{\infty} H_n^{(1)} \left(\frac{\omega r}{V_0} \right) D_n(\omega) \cos n\theta. \tag{6}$$

В решении (6) со спектральным представлением потенциала (5) совпадает только один член, пропорциональный $\cos\theta$. Коэффициент $D_1(\omega)$ определяется из условия сращивания [1]: $D_1=-i2\pi a\omega M\tilde{Y}_0$, где $\tilde{Y}_0$ – фурье-образ координаты Y_0. Следовательно, потенциал звукового поля, генерируемого вихрем, имеет вид

$$\Phi = -aMV_0^{1/2} \frac{\cos\theta}{r^{1/2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-i\pi/4} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{Y}_0 e^{i\omega\left(\frac{r}{V_0}-t\right)} \cdot \omega^{1/2}\, d\omega, \tag{7}$$

где функция Ханкеля $H_1^{(1)}$ заменена своей асимптотикой при больших аргументах. Фурье-преобразование координаты Y_0 легко найти из выражения (2) интегрированием:

$$\tilde{Y}_0 = a\left[\delta(\omega) + h^2\frac{\pi}{aV_0}\operatorname{sg} n\omega\left(1-\frac{a}{V_0}|\omega|\right)e^{-\frac{a}{V_0}|\omega|}\right]. \tag{8}$$

После подстановки выражения (8) в решение (7) интеграл можно вычислить, воспользовавшись формулой № 3.944 [3]. Потенциал скорости звукового поля, записанный во внутренних координатах, имеет следующий вид:

$$\Phi = iM^{3/2}\pi cah^2\frac{\cos\theta}{R^{1/2}}\left\{\frac{\cos\left(\frac{3}{2}\operatorname{arctg} M\frac{R-ct}{a}\right)-\sin\left(\frac{3}{2}\operatorname{arctg} M\frac{R-ct}{a}\right)}{[a^2+M^2(R-ct)^2]^{3/4}}-\right.$$
$$\left.-a\frac{\cos\left(\frac{5}{2}\operatorname{arctg} M\frac{R-ct}{a}\right)-\sin\left(\frac{5}{2}\operatorname{arctg} M\frac{R-ct}{a}\right)}{[a^2+M^2(R-ct)^2]^{5/4}}\right\}, \tag{9}$$

где $R^2=X^2+Y^2$, $\operatorname{tg}\theta=\frac{Y}{X}$ c — скорость звука в жидкости.

Угловая зависимость излучения (9) имеет дипольный характер $\cos\theta$. Зависимость потенциала (9) от числа Маха показывает, что взаимодействие вихря с ребром на плоскости является более сильным источником звука в слабосжимаемой среде, чем сталкивающиеся вихри в свободном пространстве [4], и звуковое поле сравнимо с излучением вихря при огибании края полубесконечного экрана [1]. Для объемного источника звука — ускоренного одиночного вихря, следовательно, зависимость мощности излучения от числа Маха определяется типом неоднородности границы.

Автор благодарит Л. М. Лямшева, под руководством которого выполнена настоящая работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *D. G. Crighton*. Radiation from vortex filament motion near a half plane. J. Fluid Mech., 1972, *51*, 2, 357—362.
2. *F. Obermeier*. Berechnung aerodynamisch erzeugter shall felder mittels der Methode der Matched Asymptotic Expantions. Acustica, 1967, *18*, 4, 238—239.
3. *И. С. Градштейн, И. М. Рыжик*. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., «Наука», 1971.
4. *S. Rahman*. Berechnung der Shallerzeugung beim frontalen Zusammenstoß zweier Wirbelpaare. Acustica, 1971, *24*, 1, 50—54.

Акустический институт
Академии наук СССР

Поступила
31 марта 1975 г.

УДК 534.222

ОБ ЭФФЕКТАХ ТРЕТЬЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН ДЕФОРМАЦИИ В ТВЕРДЫХ СРЕДАХ. НЕСИНХРОННЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И САМОВОЗДЕЙСТВИЕ

Б. А. Конюхов, Г. М. Шалашов

При распространении волн деформации в твердой среде имеют место эффекты, связанные с кубической нелинейностью среды, такие, как генерация второй сдвиговой гармоники [1], влияние статических напряжений полей на амплитуды гармоник [2, 3] и самовоздействие волн [4].

Теоретическое исследование генерации высших гармоник волн деформации в приближении девятиконстантной теории упругости проведено в работе [5]. Ниже приводятся результаты теоретического анализа несинхронных взаимодействий и самовоздействия волн деформации в изотропной твердой среде. Частично этот вопрос был рассмотрен в работе [6]. Такие взаимодействия есть четырехчастотные взаимодействия вида [7]

$$\begin{aligned}&\omega_1+\omega_2-\omega_1=\omega_2,\\ &\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1=\mathbf{k}_2,\end{aligned} \tag{1}$$