АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXII 1976 Вып. 1

УДК 534.25

РЕЗОНАНСНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЗВУКОВЫХ ВОЛН С ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫМ ПОТОКОМ

А. Л. Фабрикант

Рассмотрено резонансное взаимодействие малых звуковых колебаний с неоднородно-движущимся потоком в точках, где фазовая скорость звуковой волны равна скорости потока.

Начиная с Релея [1], распространение звука в неоднородно-движущейся среде исследовалось неоднократно. Были проведены численные [2, 3] и аналитические [4] исследования преломления звука в средах с кусочно-линейным профилем скорости, аналитический расчет в средах со слабонеоднородной скоростью потока [5, 6] и разрывом скорости [7—9]. Однако в этих исследованиях теряется важный эффект резонансного взаимодействия звуковой волны с потоком в точках, где фазовая скорость волны совпадает со скоростью потока. Этот эффект, как известно [1, 10], имеется лишь в нелинейных профилях скорости и, как будет показано ниже, является существенным, когда длина волны звука порядка размера неоднородности. Резонансное взаимодействие в акустике вполне аналогично затуханию (усилению) Ландау для волн в плазме [11] и проявляется в том, что характер отражения и преломления звука движущейся средой зависит от величины и знака второй производной профиля скорости в резонансной точке. Например, если в пренебрежении резонансным взаимодействием имеет место полное отражение звука [8, 9] (коэффициент отражения $|R|=1$), то резонансное взаимодействие может сделать коэффициент отражения при тех же углах падения как больше, так и меньше единицы.

Резонансное взаимодействие звука с потоком может оказаться существенным в теории шума сверхзвуковых струй, для интерпретации механизма возбуждения некоторых типов акустических генераторов (свистков) и т. д.

В настоящей статье рассматриваются лишь плоскопараллельные течения. Приведены результаты исследований [8, 12] отражения звука от тангенциального разрыва, а также исходные уравнения для исследования нелинейного профиля скорости. В рамках простой модели аналитически рассмотрено резонансное взаимодействие и приведены результаты численного счета для конкретного профиля скорости. В заключение кратко обсуждаются аналогичные задачи для волн другого происхождения.

Простейшее плоскопараллельное течение — тангенциальный разрыв скорости. Особенно интересен случай сверхзвукового скачка скорости U_0. Если $M>2$ ($M=U_0/a$, где a — скорость звука), то при падении плоской монохроматической звуковой волны на разрыв под углом θ таким образом, что $\sin\theta>(M-1)^{-1}$, энергия преломленной в движущейся среде волны оказывается отрицательной [13]. Из-за этого коэффициент отражения $|R|>1$, т. е. звук усиливается разрывом. Отражение звука от сверхзвукового тангенциального разрыва впервые исследовал Майлс [8, 12]. Им

решена начальная задача для падающей под произвольным углом волны. Из решения задачи с начальными данными получено, что при $\sin\theta > (M-1)^{-1}$ граничное условие излучения в движущейся среде надо брать в виде групповой скорости, направленной от разрыва. При этом фазовая скорость, а также поток энергии направлены к разрыву [13]. Другой важный эффект, следующий из решения начальной задачи,— это три резонансных угла падения, при которых $|R|=\infty$:

$$\sin\theta_1=\frac{2}{M},\quad \sin\theta_{2,3}=\left(\frac{M}{2}\pm\sqrt{1+\frac{M^2}{4}-\sqrt{1+M^2}}\right)^{-1}. \tag{1}$$

Эти углы соответствуют самопроизвольному излучению тангенциального разрыва. В движущуюся среду излучается отрицательная энергия, а в неподвижную — положительная. При резонансных углах потоки энергии в обе среды по модулю равны. Следует отметить, что при $M<2\sqrt{2}$ углы $\theta_{2,3}$ комплексные, что соответствует неустойчивости тангенциального разрыва [14].

Разрывной профиль скорости реализовать невозможно из-за вязкости. Учет же «размытия» разрыва ослабляет указанные эффекты. Из дальнейшего следует, что при этом возникает новый эффект: резонансное взаимодействие волны с потоком.

Линеаризованные уравнения малых баротропных возмущений в однородном плоскопараллельном течении с профилем скорости $\mathbf{U}=(U(y),0,0)$ имеют вид [10]

$$\frac{\partial u}{\partial t}+U(y)\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial U(y)}{\partial y}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+U(y)\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{a^2}\left[\frac{\partial}{\partial t}+U(y)\frac{\partial p}{\partial x}\right]=0.$$

Здесь u и v — компоненты двумерных малых колебаний профиля скорости $\mathbf{V}=(u,v,0)$, p — возмущение давления, $a=\mathrm{const}$ — скорость звука. Ищем решение, зависящее от x и t, как $e^{i\omega t-ikx}=e^{ik(ct-x)}$. После несложных преобразований получим уравнение для амплитуды давления

$$\frac{d^2p}{dy^2}-\frac{2U'}{U-c}\frac{dp}{dy}+k^2\left[\frac{(U-c)^2}{a^2}-1\right]p=0 \tag{2}$$

и уравнение для амплитуды скорости, перпендикулярной потоку,

$$\frac{d^2v}{dy^2}+v\left[k^2\frac{(U-c)^2}{a^2}-k^2+\frac{U''}{U-c}\right]+ \tag{3}$$
$$+\frac{2U'(U-c)}{a^2-(U-c)^2}\frac{dv}{dy}+\frac{2(U')^2}{a^2-(U-c)^2}v=0$$

(штрихи означают производные функции по ее аргументу). Эти уравнения описывают распространение возмущений поперек потока. При $a\to\infty$ (несжимаемая жидкость) из (3) получается уравнение Релея [1]:

$$\frac{d^2v}{dy^2}-k^2v-\frac{U''}{U-c}v=0$$

рассматриваемое обычно в задаче устойчивости невязкого течения. Ниже мы будем использовать не уравнение (3), а более простое уравнение (2), полученное Лизом [10].

Прежде всего отметим, что уравнение (2) содержит особую точку y_s, где $U(y_s)=c$. Решение $p(y)$ имеет в общем случае точку ветвления в y_s. Вопрос о выборе ветви многозначного решения был детально исследован в ряде работ [15—17]. Ответ на него можно получить, либо учитывая малую вязкость, либо решая задачу с начальными данными. Оба подхода устраняют особенность в уравнениях. Оказывается, надо выбирать ту ветвь многозначного решения, которая получается обходом особой точки y_s сверху (считается $U'(y_s)>0$).

Используя это правило обхода, можно показать [18], что в несжимаемой жидкости энергия, связанная с решением уравнения Релея, всегда поглощается в резонансной точке, за исключением случая, когда эта точка является точкой перегиба профиля скорости. В работе [18] отмечена аналогия между этим правилом обхода особой точки («правило Линя» [15]) и правилом обхода Ландау в теории плазменных колебаний. В жидкости распределение частиц по скорости задается профилем скорости $U(y)$. Как и для плазменных волн, резонансное взаимодействие колебаний с потоком приводит в некоторых случаях к их неустойчивости [15, 16, 18]. В настоящей работе показана возможность усиления звука за счет резонансного взаимодействия его со сверхзвуковым потоком, что вполне аналогично усилению Ландау плазменных волн *.

Рассмотрим «размытый» тангенциальный разрыв, т. е. слой сдвига с профилем скорости $U(y)$, удовлетворяющим условиям: $U(-\infty)=0$, $U(+\infty)=U_0$, $U'(y)>0$. При достаточно большой скорости потока ($U_0>2a$) становится возможным усиление падающего звука (т. е. $|R|>1$ для некоторых θ).

Введем безразмерные переменные:

$$z=y-y_s/L,\ c=\omega/ka,\ \alpha=kI,\ M=U_0/a,$$

$$\varphi(z)=U(z)/U_0,\quad \varphi(-\infty),\quad \varphi(+\infty)=1,\quad \varphi(0)=c/M,\quad \varphi'(z)>0.$$

Здесь L — характерный размер неоднородности, k — проекция на ось x волнового вектора падающей плоской монохроматической волны с частотой $\omega(\sin\theta=ka/\omega)$. Тогда уравнение (2) с учетом правила обхода примет вид ($\delta>0$, $\delta\to 0$).

$$\frac{d^2p}{dz^2}+\frac{2\varphi'(z)}{\varphi(z)-\dfrac{c}{M}+i\delta}\frac{dp}{dz}+\alpha^2p[(M\varphi-c)^2-1]=0. \tag{4}$$

Граничные условия для уравнения (4) в соответствии со сказанным выше будут

$$p(-\infty)=e^{-i\alpha\eta_0 z}+Re^{+i\alpha\eta_0 z}$$

$$p(+\infty)\begin{cases} Te^{i\alpha\eta_1 z} & \text{при}\quad c>M+1, & \sin\theta<(M+1)^{-1},\\ 0 & \text{при}\quad M+1>c>M-1; & (M+1)^{-1}<\sin\theta<(M-1)^{-1},\\ Te^{-i\alpha\eta_1 z} & \text{при}\quad c<M-1; & \sin\theta>(M-1)^{-1},\end{cases} \tag{5}$$

где $\eta_0=\sqrt{c^2-1}$; $\eta_1=\sqrt{(c-M)^2-1}$. Аналитически исследовать уравнение (4) с граничными условиями (5) в общем виде или для каких-либо частных гладких профилей $\varphi(z)$ не удается. Но для оценки влияния конечной ширины профиля и резонансного взаимодействия в точке $z=0$ можно воспользоваться следующим приемом.

---

* Аналогично можно получить усиление замедленных поверхностных звуковых волн за счет их резонансного взаимодействия с дозвуковым потоком. Скорость потока в этом случае должна превышать фазовую скорость поверхностных волн.

Пусть профиль $\varphi(z)$ имеет разрывы в точках $z=\pm l$, а в слое, заключенном между разрывами, он гладкий (фиг. 1), вида $\varphi_0(z)$:

$$\varphi(z)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad z<-l, \\ \varphi_0(z) & \text{при} \quad |z|<l, \\ 1 & \text{при} \quad z>l. \end{cases}$$

Считая ширину слоя l малой, будем искать решение $p(z)$ при $|z|<l$ в виде ряда, ограничиваясь его первыми несколькими членами. Ветвь многозначного решения выбираем с помощью правила обхода Линя. Связь между этим приближенным решением и плоскими волнами (5) вне области $|z|<l$ дадут граничные условия на разрыве [14].

Разложим $\varphi(z)$ в ряд около $z=0$:

$$\varphi(x)=c/M+\mu_1 z+\mu_2 z^2+\ldots .$$

Решая теперь уравнение (4) методом Фробениуса, найдем два линейно-независимых решения:

$$p_1(z)=z^3+\frac{3}{2}\frac{\mu_2}{\mu_1}z^4+\ldots, \tag{6}$$

$$p_2(z)=\frac{4\mu_2}{3\mu_1}\ln z\, p_1(z)-\frac{2}{\alpha^2}+z^2+\ldots . \tag{7}$$

Ограничиваясь точностью $O(z^3)$ $(z\ll 1)$, получаем фундаментальную систему:

$$p_1(z)\approx z^3$$

$$p_2(z)\approx\frac{4\mu_2}{3\mu_1}z^3\ln z-\frac{2}{\alpha^2}+z^2, \tag{8}$$

$$p_1'(z)\approx 3z^2,$$

$$p_2'(z)\approx\frac{4\mu_2}{\mu_1}z^2\ln z+2z+\frac{4\mu_2}{3\mu_1}z^2.$$

Согласно правилу Линя, мы должны при $z<0$ определить решение (7) следующим образом:

$$p_2(z<0)=\frac{4\mu_2}{3\mu_1}z^3\ln|z|+i\pi z^3\frac{4\mu_2}{3\mu_1}-\frac{2}{\alpha^2}+z^2. \tag{9}$$

Из формул (6)—(9) видно, что многозначность решения и особенности, связанные с наличием резонансной точки, исчезают для линейного профиля ($\mu_2=0$).

Граничные условия на разрывах при $z=\pm l$ имеют вид

$$p_{\mathrm{I}}(z=-l)=p_{\mathrm{II}}(z=-l),$$

$$p_{\mathrm{III}}(z=+l)=p_{\mathrm{II}}(z=+l),$$

$$\left(1-\frac{c}{M}\right)^{-2}\frac{dp_{\mathrm{I}}}{dz}\bigg|_{z=-l}=(\mu_1 l)^{-2}\frac{dp_{\mathrm{II}}}{dz}\bigg|_{z=-l},$$

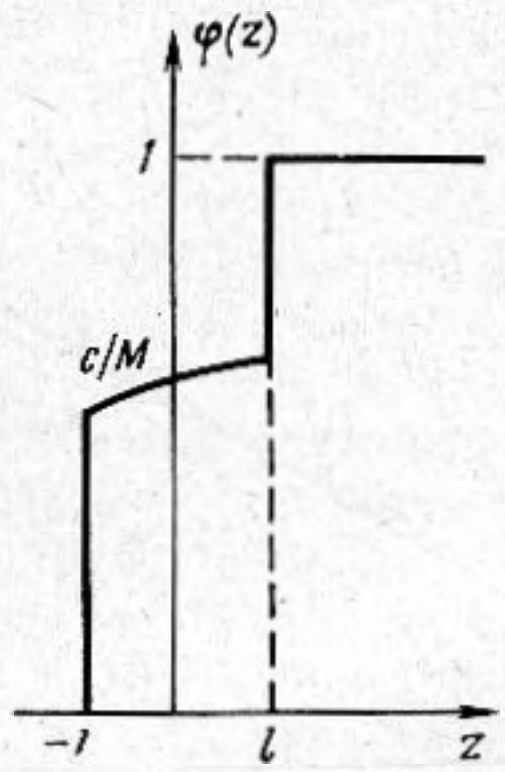
$$\left(\frac{c}{M}\right)^{-2}\frac{dp_{\mathrm{III}}}{dz}\bigg|_{z=+l}=(\mu_1 l)^{-2}\frac{dP_{\mathrm{II}}}{dz}\bigg|_{z=+l},$$

где p_{I} и p_{III} — решения (5) вне области $|z|<l$, а $p_{\mathrm{II}}=Ap_1(z)+Bp_2(z)$ — решение внутри области. Из граничных условий получаем связь решений p_{I}, p_{II}, p_{III}.

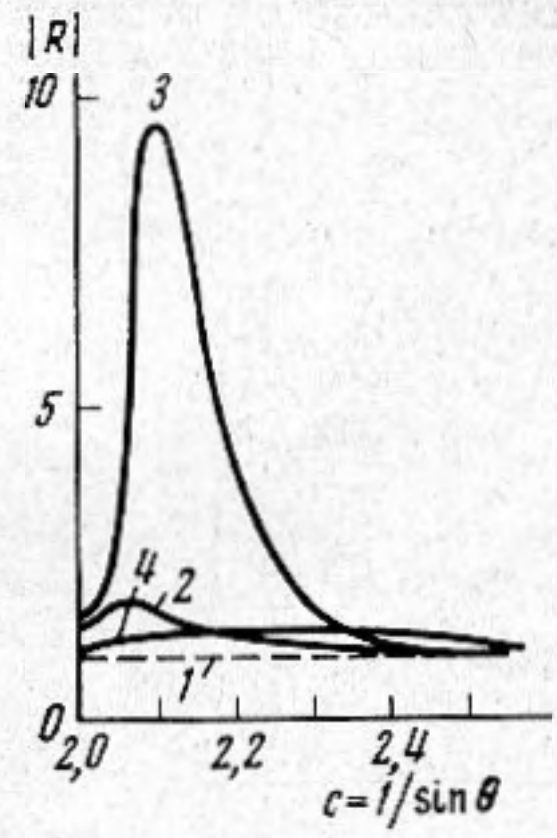
Рассмотрим сначала диапазон углов падения θ, при которых $|R|>1$ для резкого разрыва ($\sin\theta>(M-1)^{-1}$). Для таких θ получаем

$$(10)\qquad |R|=\left|\frac{Z_0+Z_1-\dfrac{2\pi\mu_2}{\mu_1^3}\alpha-\dfrac{2i}{\mu_1^2 l}\alpha}{Z_0-Z_1+\dfrac{2\pi\mu_2}{\mu_1^3}\alpha+\dfrac{2i}{\mu_1^2 l}\alpha}\right|,$$

где $Z_0=M^2\sqrt{c^2-1}/c^2$, $Z_1=M^2\sqrt{(c-M)^2-1}/(c-M)^2$. При $\alpha\to 0$ величина $|R|\to\to(Z_0+Z_1)/(Z_0-Z_1)$, что совпадает с выражением для резкого разрыва [8, 9]. Взяв $l\sim 1$, мы можем использовать формулу (10) для грубых оценок зависимости $|R|$ от толщины слоя α и от величины второй производной



Фиг. 1



Фиг. 2

Фиг. 1. Модельный профиль скорости потока

Фиг. 2. Угловая зависимость коэффициента отражения в диапазоне полного отражения: *1* – $\alpha=0$; *2* – $\alpha=0{,}1$; *3* – $\alpha=0{,}3$; *4* – $\alpha=1$

профиля μ_2 в резонансной точке. Легко получить аналогичную формулу и в диапазоне углов полного отражения:

$$(11)\qquad |R|=\left|\frac{Z_0-\dfrac{2\pi\mu_2}{\mu_1^3}\alpha-i\left(|Z_1|+\dfrac{2}{\mu_1^2 l}\alpha\right)}{Z_0+\dfrac{2\pi\mu_2}{\mu_1^3}\alpha+i\left(|Z_1|+\dfrac{2}{\mu_1^2 l}\alpha\right)}\right|.$$

Резонансное взаимодействие для узких профилей оказывается малым ($\sim\alpha$). В зависимости от знака μ_2 может быть усиление или ослабление звука при резонансном взаимодействии *. В случае профиля с симметричной производной вторая производная $\varphi''(z)$ меняет знак при $z=0$. Следовательно, при углах падения $2/M<\sin\theta<1$ $(1<c<M/2)$ падающий звук усиливается вследствие резонансного взаимодействия, а при $1/M<\sin\theta<<2/M$ $(M/2<c<M)$ – ослабляется. При углах полного отражения, для которых $|R|=1$ у резкого разрыва ($(M+1)^{-1}<\sin\theta<(M-1)^{-1}$), коэффициент отражения от слоя сдвига превышает единицу благодаря резонансному взаимодействию, причем $(|R|-1)\lesssim\alpha\ll 1$.

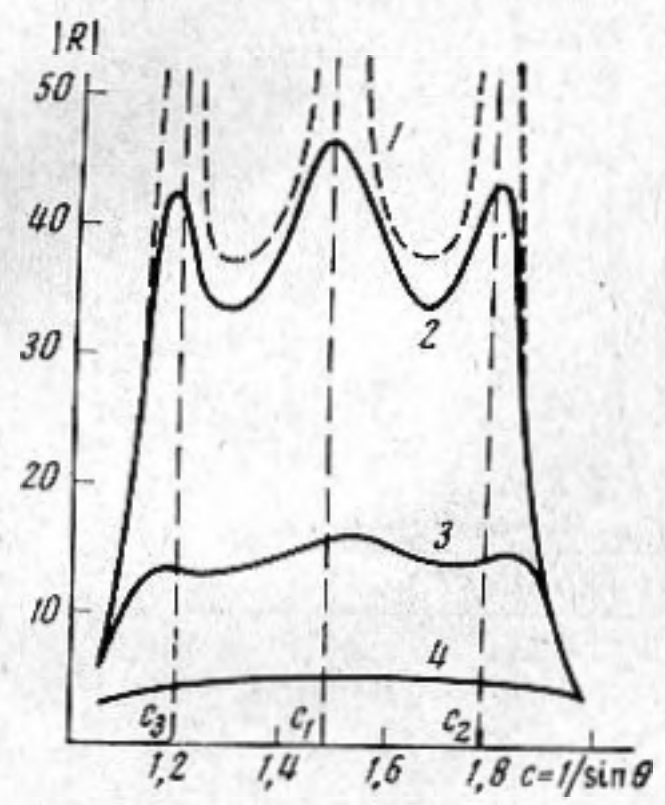
Из формулы (10) видно также, что конечность ширины профиля (члены $2i\alpha/l\mu_1^2$) ограничивает максимумы $|R|$; их высота оказывается обратно

* Зависимость усиления волны от второй производной профиля скорости в резонансной точке отмечена в связи с генерацией ветром волн на воде [19].

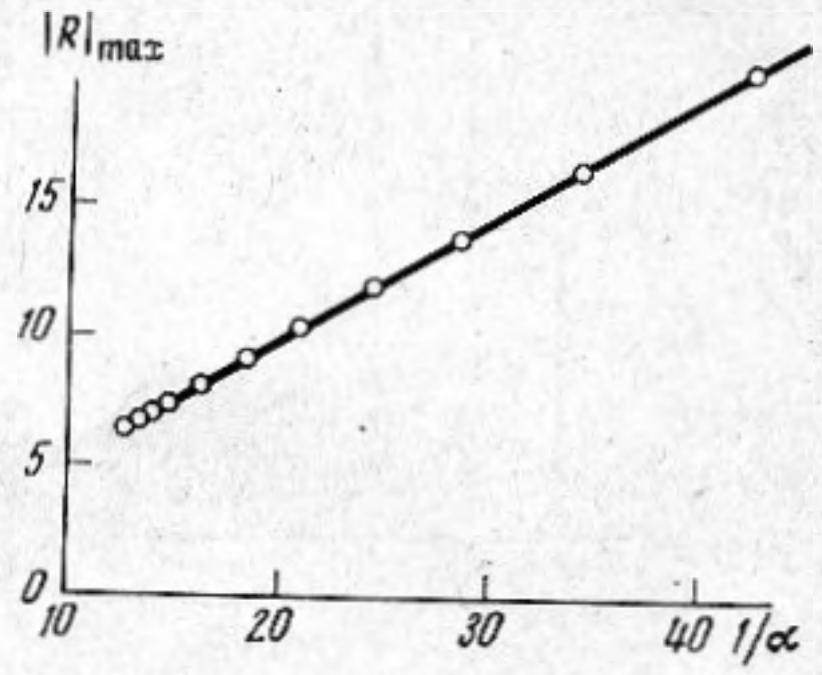
пропорциональной толщине слоя α (при $\alpha \ll 1$) в соответствии с результатами работы [4]. Кроме того, из (10) следует, что резонансное взаимодействие сдвигает максимумы.

В качестве примера, иллюстрирующего полученные закономерности, а также для выяснения пределов применимости кусочно-непрерывной модели, рассмотренной выше, проведен численный расчет граничной задачи (4), (5) на ЭВМ для профиля скорости $\varphi(y)=\dfrac{1+\operatorname{th} y/L}{2}$. Исследовались лишь наиболее интересные углы падения: диапазон полного отражения $((M+1)^{-1}<\sin\theta<(M-1)^{-1})$ и диапазон усиленного отражения $((M-1)^{-1}<\sin\theta<1)$. Особая точка y_s обходилась по правилу Линя.

На фиг. 2 даны графики угловой зависимости $|R|$ в диапазоне полного отражения. В отличие от резкого разрыва ($\alpha=0$) здесь $|R|>1$ за счет ре-



Фиг. 3



Фиг. 4

Фиг. 3. Угловая зависимость коэффициента отражения в диапазоне усиленного отражения: *1* – $\alpha=0$; *2* – $\alpha=0{,}01$; *3* – $\alpha=0{,}03$; *4* – $\alpha=0{,}1$

Фиг. 4. Зависимость максимума коэффициента отражения от толщины слоя сдвига

зонансного взаимодействия. При $\alpha \ll 1$, как следует и из оценочной формулы (11), резонансный эффект мал ($\infty\alpha$). При $\alpha \ll 1$ расстояние от края струи до резонансной точки велико и отличие $|R|$ от единицы, очевидно, мало ($\infty e^{-\alpha}$). Из фиг. 2 ясно, что резонансный эффект велик, когда длина падающей волны порядка размера неоднородности ($\lambda/L \sim 2\pi/\alpha \sim 1$).

На фиг. 3 изображены графики угловой зависимости $|R|$ в диапазоне усиленного отражения. При $\alpha \ll 1$, в согласии с формулой (10), имеется три резонансных угла. В отличие от резкого разрыва высота резонансов ограничена на уровне $|R|_{\max} \infty 1/\alpha$; график $|R|_{\max}$ в функции $1/\alpha$ дан на фиг. 4.

Известно, что малые возмущения, распространяющиеся в неоднородно-движущейся среде, могут взаимодействовать с потоком в точках, где их фазовая скорость совпадает со скоростью потока. В настоящей работе показано, что это взаимодействие может приводить к усилению либо к ослаблению отраженного звукового сигнала. Механизм резонансного взаимодействия аналогичен известному механизму затухания (усиления) Ландау волн в плазме. При этом роль функции распределения частиц по скоростям играет величина $f=(dU(z)\,dz)^{-1}$ (здесь $U(z)$ – профиль скорости плоскопараллельного потока). Наличие затухания или усиления зависит от знака $\partial f/\partial U \infty (d^2U/dz^2)\,(dU/dz)^{-3}$ в резонансной точке. Эффект этот оказывается существенным, когда длина волны падающего звука порядка размера неоднородности.

Для слоя сдвига малой, но конечной ширины как аналитические оценки, так и численный расчет указывают на наличие трех резонансных углов падения с максимальным значением коэффициента отражения.

Эффекты резонансного взаимодействия волн с неоднородными потоками должны быть существенны не только для звуковых волн, но и для электромагнитных, внутренних и поверхностных гравитационных волн. Отражение электромагнитных и внутренних волн от тангенциального разрыва уже рассматривалось* [20]. Полученные результаты вполне аналогичны тем, которые обсуждались выше для звуковых волн. Что же касается резонансного взаимодействия, то оно рассмотрено лишь для внутренних волн в устойчиво стратифицированной жидкости. Здесь функция распределения частиц по скоростям: $f=\rho(z)\,[\partial U(z)/dz]^{-1}$, а ее производная по скорости v: $\partial f/\partial U \infty (U')^{-2}[\rho U''/U'-\rho']$. При больших числах Ричардсона эта величина независимо от профиля имеет всегда один знак. Аналитическое исследование [21, 22] показывает, что внутренние волны всегда поглощаются в резонансной точке.

Для электромагнитных волн эффект резонансного взаимодействия с потоком существует лишь в диспергирующих средах. Соответствующее рассмотрение показывает, что в среде без дисперсии резонансного взаимодействия нет.

Пользуюсь случаем выразить признательность А. А. Андронову за постоянный интерес к работе и ряд полезных советов, благодарность В. В. Железнякову за ценные замечания и И. Г. Зарницыной за проведение численных расчетов на ЭВМ. Следует отметить роль замечания В. И. Таланова, оказавшего существенное влияние на постановку задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Релей.* Теория звука, М., Гостехтеориздат, 1955.
2. *L. K. Shubert.* Numerical Study of sound refraction by a Jet flow. J. Acoust. Soc. America, 1972, *51*, pt. 1, 439–443.
3. *G. G. Steinmetz, J. J. Singh.* Reflection and transmission of acoustical waves from a layer with spacedependent velosity. J. Acoust. Soc. America, 1972, *51*, 1, 218–222.
4. *B. B. Graham, E. B. Graham.* Effect of a Shear Layer on Plane waves of Sound in a Fluid. J. Acoust. Soc. America, 1969, *46*, 1, pt. 2, 169–175.
5. *Д. И. Блохинцев.* Акустика неоднородно-движущихся сред. М.– Л., Гостехтеориздат, 1946.
6. *R. J. Thompson.* Ray acoustic theory for an inhomogeneous moving medium. J. Acoust. Soc. America, 1972, *51*, 5, pt. 2, 1675–1682.
7. *Н. Н. Андреев, И. Г. Русаков.* Акустика движущейся среды. М.– Л., Гостехтеориздат, 1934.
8. *J. W. Miles.* On the Reflection of Siund at an Interface of Relative Motion. J. Acoust. Soc. America, 1957, *29*, 2, 226–228.
9. *Н. Г. Кикина, Д. Г. Санников.* О неустойчивости плоского тангенциального разрыва. ПММ, 1969, *33*, № 3, 580–581.
10. *Р. Бетчов, В. Криминале.* Вопросы гидродинамической устойчивости. М., «Мир», 1971.
11. *Л. Д. Ландау.* Собрание трудов, т. 2, М., «Наука», 1969.
12. *J. W. Miles.* On the Disturbed Motion of a Plane Vortex Sheet. J. Fluid Mech., 1958, *4*, 4, 538–552.
13. *Б. Б. Кадомцев, А. Б. Михайловский, А. В. Тимофеев.* Волны с отрицательной энергией в диспергирующих средах. ЖЭТФ, 1964, *47*, 6 (12), 2266–2268.
14. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лившиц.* Механика сплошных сред. М., «Наука», 1953.
15. *Ц. Ц. Линь.* Теория гидродинамической устойчивости. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
16. *В. Вазов.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М., «Мир», 1968.
17. *Л. А. Дикий.* Устойчивость плоскопараллельных потоков идеальной жидкости. Докл. АН СССР, 1960, *135*, 5, 1068–1071.
18. *А. В. Тимофеев.* Колебания неоднородных течений плазмы и жидкости. УФН, 1970, *102*, 2, 185–210.

---

* Соответствующие результаты для электромагнитных волн получены Г. А. Лупановым.

19. *J. W. Miles.* On the generation of surface waves by shear flows. J. Fluid Mech., 1957, *3*, 2, 185–204.
20. *J. F. McKenzie.* Reflection and Amplification of Acoustic — Gravity waves at a Density and Velosity Discontinuity. J. Geophys. Res., 1972, *77*, 16, 2915–2926.
21. *J. R. Booker, F. P. Bretherton.* The critical layer for internal gravity waves in a shear frow. J. Fluid Mech., 1967, *27*, 3, 513–539.
22. *W. L. Jones.* Reflection and stability of waves in stably stratified Fluids with shear flow: a numerical study. J. Fluid Mech., 1968, *34*, 3, 609–624.

Научно-исследовательский
радиофизический институт, Горький

Поступила
18 июля 1974 г.