ки рассеяния $|f(\eta)|$, вычисленные при помощи формулы (9) для волновых размеров $c=3{,}1$ (кривая *1*) и $c=6{,}0$ (кривая *2*). Здесь же приведена индикатриса рассеяния жесткого сфероида при $c=3{,}0$ (кривая *3*). Нетрудно заметить, что идеальный сфероид обладает более направленным рассеянием, что сказалось и на величине относительного сечения обратного рассеяния σ_0, определяемого в нашей осесимметричной задаче выражением

$$\sigma_0 = \frac{4\pi}{A}|f(1)|^2,$$

где A – площадь геометрической тени.

На фиг. 4 представлены зависимости $\sigma_0(c)$ для идеальных сфероидов (мягкого – кривая *2* и жесткого – кривая *1*), вычисленные с шагом $h_c=0{,}5$ от $c=0{,}5$ до $c=10{,}0$ для $\xi_0=0{,}1005$, и отдельные значения σ_0, обозначенные плюсом, для нашей упругой полой оболочки.

Автор выражает благодарность Ю. А. Клокову и Х. Седол за помощь в разработке алгоритма расчетов на ЭЦВМ и проведение вычислений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *О. И. Гроссман, А. А. Клещев, И. И. Клюкин.* Рассеяние осесимметричной плоской звуковой волны упругой сфероидальной оболочкой. Тр. Ленингр. кораблестр. ин-та, 1970, вып. 74, стр. 31–36.
2. *О. И. Гроссман, А. А. Клещев, И. И. Клюкин.* Рассеяние осесимметричной плоской звуковой волны упругой сфероидальной оболочкой. Сб. анн. докл. на Всес. симпозиуме по дифракции и распространению волн. Л., 1970, стр. 17.
3. *К. Фламмер.* Таблицы волновых сфероидальных функций. М., ВЦ АН СССР, 1962.
4. *А. А. Клещев, Л. С. Шейба.* Рассеяние звуковой волны идеальными вытянутыми сфероидами. Акуст. ж., 1970, *16*, 2, 264–268.

Ленинградский кораблестроительный институт

Поступила 14 января 1974 г.

УДК 534.2

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЗВУКА В СДВИГОВОМ ПОТОКЕ

В. П. Лесников

Изучение процесса распространения звука в потоке жидкости или газа, скорость которого зависит от пространственных координат, является сложной в математическом отношении задачей, и обычно ее решение проводится методами геометрической акустики [1]. При этом полностью пренебрегают вязкостью и теплопроводностью среды. Между тем их учет необходим для полного описания звукового процесса. В данной работе приводится решение задачи о распространении звука в среде с постоянными температурой и плотностью на фоне течения, заданного в форме

$$U_x=\Gamma y,\ U_y=U_z=0, \tag{1}$$

где Γ – некоторый коэффициент, когда вязкость и теплопроводность среды играют существенную роль. В этом случае для области течения (1), достаточно далеко расположенной от ограничивающих среду поверхностей, так что звуковые колебания, распространяющиеся из этой области, затухнут в результате действия вязких сил и теплопроводности раньше, чем достигнут границ течения, можно вовсе пренебречь свойствами граничных поверхностей и считать, что звук распространяется в неограниченной среде. Наше дальнейшее рассмотрение будет относиться именно к указанной области течения при некотором ограничении на величину Γ, которое будет далее оговорено. Что же касается поведения звуковых возмущений в непосредственной близости границы, то здесь требуется совершенно другой подход.

Для упрощения выкладок и последующего анализа результатов мы будем вначале предполагать процесс распространения звуковых колебаний адиабатическим. Исходными уравнениями в этом случае являются линеаризованные уравнения непрерывности и Навье – Стокса для малых звуковых возмущений плотности ρ, скорости $\mathbf{v}$ и давления p

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\Gamma y\frac{\partial\rho}{\partial x}+\rho_0\operatorname{div}\mathbf{v}=0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{dt}+\Gamma y\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x}+\mathbf{x}^0\Gamma v_y+\frac{1}{\rho_0}\nabla p-\nu\Delta\mathbf{v}-\left(\frac{1}{3}\nu+\xi\right)\nabla(\nabla\mathbf{v})=0, \tag{3}$$

где ρ_0 – невозмущенная плотность среды, ν, ξ – кинематические коэффициенты сдвиговой и объемной вязкостей, $\mathbf{x}^0$ – орт оси $0x$. К уравнениям (2) и (3) необходимо добавить дифференциальное уравнение состояния

$$p=c^2\rho+\bar{p}, \tag{4}$$

где c – скорость звука, $\bar{p}$ – часть возмущения давления, определяемая возмущениями скорости $\mathbf{v}$.

Положим

$$\mathbf{v}=\operatorname{grad}\varphi+\mathbf{u}, \quad \operatorname{div}\mathbf{u}=0;$$

тогда для $\bar{p}$ нетрудно получить соотношение

$$-\frac{1}{\rho_0}\Delta\bar{p}=2\Gamma\frac{\partial u_y}{\partial x} \tag{5}$$

Используя это и предыдущие равенства, из уравнений (2) и (3) найдем

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\Gamma y\frac{\partial\rho}{\partial x}+\rho_0\Delta\varphi=0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\Gamma y\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{c^2}{\rho_0}\rho-D\Delta\varphi=0, \tag{7}$$

где

$$D=\frac{4}{3}\nu+\xi.$$

Уравнения (6) и (7) совместно с начальными условиями $\rho(\mathbf{r}, 0)$ и $\varphi(\mathbf{r}, 0)$ описывают процесс распространения звуковых колебаний на фоне течения (1). Отличие этих уравнений от соответственных уравнений для покоящейся среды заключается в замене временной производной на $\frac{\partial}{\partial t}+\Gamma y\frac{\partial}{\partial x}$. Это обстоятельство отражает тот факт, что звуковая волна по мере своего распространения сносится потоком, причем различные участки фронта волны сносятся по-разному. Положение поверхности фронта волны может быть определено из характеристических уравнений для системы (6), (7). Для покоящейся среды и точечного источника решению характеристических уравнений $f(r\pm ct)/r$ соответствуют сходящиеся и расходящиеся сферические волны. Наличие стационарного сдвигового потока приводит к нарушению сферичности фронта. Можно показать, что для области течения, в которой скорость потока меняется на величину, значительно меньшую скорости звука, решение системы характеристических уравнений в первом порядке малости по отношению изменения скорости потока к скорости звука имеет вид $f(r\pm ct\pm\Gamma xy/2c)/r$.

Из уравнений (6), (7) видно, что величины $\rho(\mathbf{r}, t)$ и $\varphi(\mathbf{r}, t)$ можно представить в виде пространственных плоских волн

$$\rho(\mathbf{r}, t)=\int\hat{\rho}(\mathbf{k}, t)\exp(i\mathbf{k}^*\mathbf{r})\,d\mathbf{k}, \quad \varphi(\mathbf{r}, t)=\int\hat{\varphi}(\mathbf{k}, t)\exp(i\mathbf{k}^*\mathbf{r})\,d\mathbf{k};$$

волновой вектор этих волн меняется со временем как по величине, так и по направлению в соответствии с формулой

$$\mathbf{k}^*=(k_x, k_y^*, k_z)=(k_x, k_y-\Gamma k_x t, k_z). \tag{8}$$

Для $\hat{\rho}$ и $\hat{\varphi}$ тогда получим систему уравнений, которая отличается от соответственной системы для покоящейся жидкости тем, что в ней фигурирует $\mathbf{k}^*$ вместо обычной постоянной величины $\mathbf{k}$

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt}-\rho_0\mathbf{k}^{*2}\hat{\varphi}=0, \tag{9}$$

$$\frac{d\hat{\varphi}}{dt}+\frac{c^2}{\rho_0}\hat{\rho}+D\mathbf{k}^{*2}\hat{\varphi}=0. \tag{10}$$

К уравнениям (9), (10) следует добавить начальные условия $\hat{\rho}(\mathbf{k}, 0)$ и $\hat{\varphi}(\mathbf{k}, 0)$, которые, как легко заметить, являются фурье-образами $\rho(\mathbf{r}, 0)$ и $\varphi(\mathbf{r}, 0)$.

Исключая из уравнения (10) ρ и затем полагая

$$\hat{\varphi}=\psi \exp(-DQ/2),$$

где Q – однородная положительно-определенная квадратичная форма от k_x, k_y, k_z (при $t>0$)

$$Q=\int_0^t \mathbf{k}^{*2}\,dt=\left\{k_x^2+k_y^2+k_z^2-\Gamma k_x k_y t+\frac{(\Gamma k_x t)^2}{3}\right\}t, \tag{11}$$

находим для ψ следующее волновое уравнение:

$$\frac{d^2\psi}{dt^2}+c^2\mathbf{k}^{*2}\psi=0. \tag{12}$$

Мы здесь опустили члены, содержащие D, что соответствует обычному пренебрежению вязкостью в фазе звуковых колебаний, поскольку для звуковых и ультразвуковых волн всегда $ck\gg Dk^2$. (Это значительно упрощает конечные формулы, хотя принципиально такого пренебрежения можно было бы и не делать.)

В уравнении (12) коэффициент при ψ, в силу (8), не является постоянным, т. е. звуковая частота процесса меняется со временем.

Введем характерное время нашей задачи t^+ – время, протекшее от момента возникновения звукового возмущения до его затухания. Это время определяется диссипативными характеристиками среды. Для покоящейся среды в адиабатическом приближении t^+ имело бы порядок $1/D\mathbf{k}^2$.

Будем считать, что величина $\varepsilon=\Gamma t^+\ll 1$. Это условие и есть то ограничение на величину Γ, которое мы отмечали выше. Переходя к безразмерному времени $t'=t/t^+$, в уравнении (12) вместо величины Γ получим ε, и формально член при ψ станет функцией медленной переменной $\tau=\varepsilon t'$. Тогда для решения уравнения можно воспользоваться методом адиабатических инвариантов [2]. При этом ψ представляется рядом

$$\psi=\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j(\theta,\tau)\,\varepsilon^j,$$

где θ – быстрая переменная, определяющая масштаб, на котором частота звукового процесса будет постоянной, равная

$$\theta=c\int_0^t k^*\,dt=\frac{c}{2\Gamma k_x}\left(k_y k-k_y^* k^*+(k_x^2+k_z^2)\ln\frac{|k_y+k|}{|k_y^*+k^*|}\right). \tag{13}$$

Проведя соответственные вычисления, окончательно получим

$$\hat{\varphi}(\mathbf{k},t)=-\frac{c}{\sqrt{kk^*}}\frac{\hat{\rho}(\mathbf{k},0)}{\rho_0}e^{-DQ/2}\sin\theta+0(\varepsilon). \tag{14}$$

Здесь при использовании начальных условий мы положили $\varphi(\mathbf{k},0)$ равным нулю, что фиксирует начальную фазу колебаний.

Для звуковых возмущений плотности при помощи формул (10) и (14) теперь нетрудно получить

$$\hat{\rho}(\mathbf{k},t)=\hat{\rho}(\mathbf{k},0)\sqrt{\frac{k^*}{k}}\,e^{-DQ/2}\cos\theta+0(\varepsilon). \tag{15}$$

Сравнивая формулы (14) и (15) с выражениями для скалярного потенциала и плотности в покоящейся среде, видим, что наличие сдвигового течения приводит к непрерывному изменению всех характеристик звукового процесса: частоты, коэффициента затухания, амплитуды. Причем характер изменения этих величин существенным образом зависит как от величины Γ, так и от ориентации волнового вектора волны относительно потока. Простой анализ формул (11) и (13) показывает, что звуковые волны на фоне течения (1) только в начальный момент времени имеют частоту и коэффициент затухания такие же, как у соответственных волн в неподвижной жидкости. А затем, по мере развития процесса, происходит уменьшение частоты и коэффициента затухания звуковых волн, для которых выполняется соотношение $\Gamma k_y k_x>0$, и увеличение указанных величин у волн, для которых $\Gamma k_y k_x<0$. Если волновой вектор волны не имеет составляющей вдоль потока, т. е. $k_x=0$, то такая звуковая волна оказывается нечувствительной к наличию сдвигового потока и распространяется, как и в покоящейся среде.

Изложенный подход может быть без труда обобщен на случай, когда процесс распространения звука не является адиабатическим. К системе исходных уравнений (2), (3) при этом следует добавить уравнение теплопроводности, которое в пренебрежении членами, описывающими производство тепла возмущениями скорости, имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\Gamma y\frac{\partial T}{\partial x}-\lambda\gamma\,\Delta T+\frac{\gamma-1}{\beta}\operatorname{div}\mathbf{v}=0, \tag{16}$$

где λ – коэффициент температуропроводности, γ – отношение удельных теплоемкостей, β – коэффициент теплового расширения, и вместо уравнения (4) использовать дифференциальное уравнение состояния

$$p=\frac{c^2}{\gamma}\left(\frac{\rho}{\rho_0}+\beta T\right)+\bar{p}. \tag{17}$$

Здесь величина $\bar{p}$ по-прежнему определяется формулой (6).

Применяя к уравнениям (2), (3), (16), (17) тот же метод решения, что и в адиабатическом приближении [2], для возмущений плотности, скалярного потенциала и температуры можно получить соотношения

$$\hat{\rho}(\mathbf{k},t)=\sqrt{\frac{k^*}{k}}A\cos\theta e^{-LQ}+Be^{-\lambda Q}, \tag{18}$$

$$\hat{\varphi}(\mathbf{k},t)=-\frac{1}{\rho_0}\left\{A\frac{c}{\sqrt{kk^*}}\sin\theta e^{-LQ}-\lambda\sqrt{\frac{k}{k^*}}B\cos\theta e^{-LQ}+\lambda Be^{-\lambda Q}\right\}, \tag{19}$$

$$\hat{T}(\mathbf{k},t)=\frac{1}{\rho_0\beta}\left\{\sqrt{\frac{k^*}{k}}A(\gamma-1)\cos\theta e^{-LQ}-Be^{-\lambda Q}\right\}, \tag{20}$$

где $A=[\hat{\rho}(\mathbf{k},0)+\hat{T}(\mathbf{k},0)\beta\rho_0]/\gamma$, $B=[\hat{\rho}(\mathbf{k},0)(\gamma-1)-\hat{T}(\mathbf{k},0)\beta\rho_0]/\gamma$, $L=\frac{1}{2}[D+\lambda(\gamma-1)]$. При этом мы использовали обычные неравенства $ck\gg Dk^2$, $ck\gg\gamma\lambda k^2$ и считали начальное значение $\hat{\varphi}(\mathbf{k},0)$ нулевым.

Как видно из формул (18) – (20), переход от адиабатического рассмотрения к неадиабатическому привел к тем же изменениям, которые появляются при таком переходе в неподвижной среде. Что касается зависимостей характеристик процесса от величины Γ и от направления распространения звуковой волны относительно потока, то они имеют такой же вид, как и в рассмотренном выше адиабатическом приближении.

Результаты (18) – (20) можно переформулировать в терминах функций Грина. Для этого достаточно положить $\rho(\mathbf{r},0)=m\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$ и $T(\mathbf{r},0)=n\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$, где m и n – некоторые постоянные, $\delta(\mathbf{r})$ – трехмерная функция Дирака, и заменить везде начальный момент времени $t=0$ на $t=t_0$. Тогда $\hat{\rho}(\mathbf{k},t_0)=me^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_0}$ и $\hat{T}(\mathbf{k},t_0)=ne^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_0}$ и подстановка в формулы (18) – (20) приводит к тензору функций Грина нашей задачи, соответствующему распространению звуковых волн от мгновенного источника в точке $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0$ в момент $t=t_0$.

В заключение выражаю признательность проф. И. З. Фишеру за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Д. И. Блохинцев.* Акустика неоднородной движущейся среды. М.– Л., Гостехтеориздат, 1946.
2. *Дж. Коул.* Методы возмущений в прикладной математике. М., «Мир», 1972.

Одесский государственный университет
им. И. И. Мечникова

Поступила
16 января 1975 г.