АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXI 1975 Вып. 4

УДК 534.232

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ГЕНЕРАЦИЯ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В СРЕДЕ СО СТРИКЦИЕЙ

М. С. Сандлер, Б. В. Свешников

Рассмотрена параметрическая генерация акустических волн в диэлектрике со стрикцией, получена система укороченных уравнений, найдены условия самовозбуждения и значение стационарной амплитуды, приведены оценки выходной мощности.

Вопросам использования стрикционной нелинейности для построения различных электроакустических устройств посвящен ряд работ (см., например, работы [1—3]). Так, в работе [1] показана перспективность применения стрикционной связи для усиления ультразвука дрейфом носителей тока. В работе [2] приведены результаты исследования «стрикционного» электроакустического преобразователя, в котором стрикционная связь рассматривается как феноменологический эквивалент пьезоэффекта с пьезоконстантой, пропорциональной приложенному сильному постоянному электрическому полю.

Возможность использования параметрических электроакустических явлений в диэлектрике со стрикцией для построения усилителя, а также преобразователя электрической энергии в акустическую обсуждена в работе [3]. Как в ней показано, при приложении электрического напряжения накачки к встречно-штыревой системе электродов, нанесенной на поверхность диэлектрической пластинки, на определенной частоте появляется отрицательное сопротивление. Наличие последнего при соответствующих условиях может привести к генерации электрического поля на этой частоте, а также акустических волн. Настоящая статья посвящена исследованию этого вопроса.

Пусть на поверхность диэлектрика нанесена встречно-штыревая система электродов с периодом $2d$ (см. фиг. 1). На эту систему электродов нагружены цепь с э.д.с. накачки $\tilde{E}_{01}$ на частоте ω_1 и резонансная цепь с $\omega_{res}=\omega_{20}$. При $\omega_1>\omega_{20}$, $\omega_1>2\pi v/d$ (v — скорость акустических волн) отрицательное сопротивление возникает на частоте $\omega_2=\omega_1-\Omega$ ($\Omega=2\pi v/d$) [3]. Оно пропорционально интенсивности накачки. Превышение накачкой некоторого порога, который будет найден ниже, приводит к самовозбуждению системы: начинается генерация электрических колебаний на частоте ω_2 ($\omega_2=\omega_{20}+\Delta\omega$) и двух встречных акустических волн частоты Ω. Процессы в системе описываются уравнением движения упругой среды, уравнениями состояния среды со стрикционной нелинейностью [4] и законом Ома для электрических цепей:

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial T}{\partial x}, \tag{1}$$

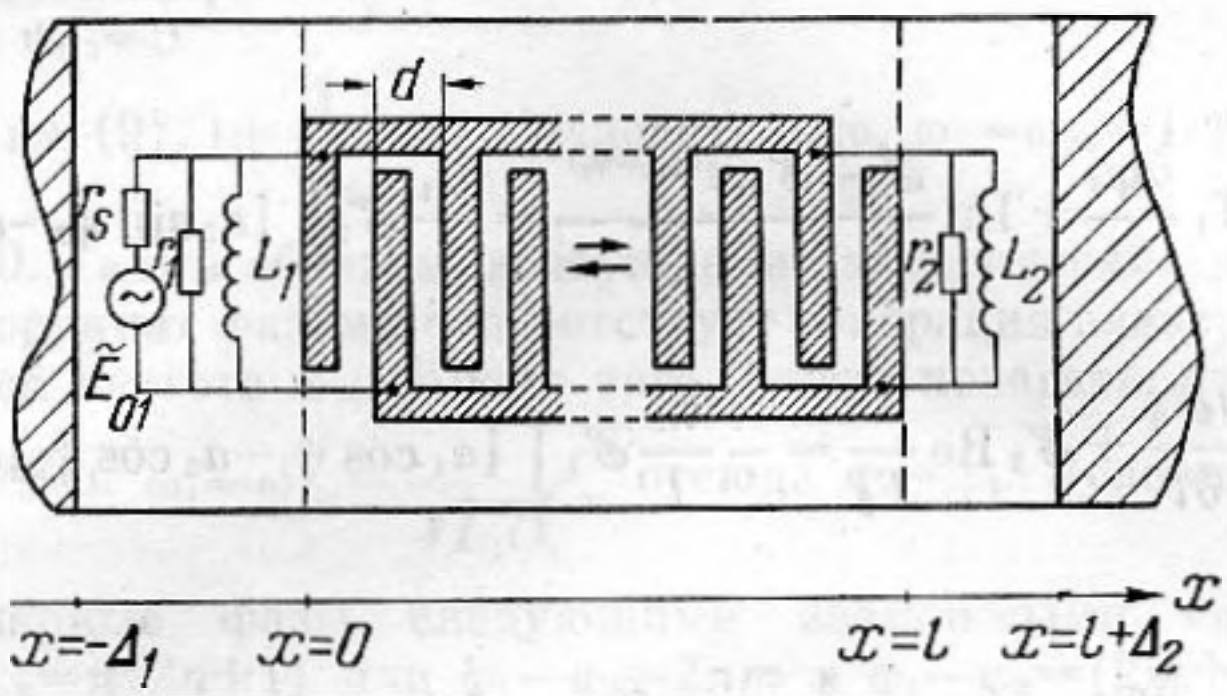
$$T=c\frac{\partial u}{\partial x}+HEE \tag{2}$$

(3) $$D=\varepsilon E-8\pi H\frac{\partial u}{\partial x}E,$$

(4) $$E_{01}=I_1 r_s+U_1+\frac{U_1}{z_1}r_s,$$

(5) $$O=I_2 z_2+U_2.$$

Здесь ρ — плотность вещества; T — механическое напряжение, u — смещение частиц вещества, c — постоянная упругости, H — стрикционная константа, ε — диэлектрическая постоянная, E, D — напряженность и индук-



Фиг. 1. Принципиальная схема параметрического электроакустического генератора

ция электрического поля, $U_{1,2}$ — напряжения между электродами на частотах ω_1 и ω_2 соответственно, $I_{1,2}$ — токи смещения, вычисляемые по формуле

$$I=\int\limits_{\sigma}\frac{\partial D_n}{\partial t}d\sigma,$$

где σ — полная площадь электродов одной полярности,

$$z_{1,2}=r_{1,2}^{-1}+(i\omega_{1,2}L_{1,2})^{-1}$$

где $L_{1,2}$ — согласующие индуктивности, а $r_{1,2}^{-1}$ — их проводимости (см. фиг. 1), r_s — внутреннее сопротивление источника,

$$\tilde{E}_{01}=\frac{1}{2}\tilde{\mathscr{E}}_{01}e^{i\omega_1 t}+\text{к. с.}$$

Запись уравнений (1)—(5) справедлива для рассматриваемой в работе [3] одномерной модели в так называемом приближении нормальных полей *.

В соответствии с изложенным выше решение этих уравнений ищем в следующем виде:

(6) $$u=u_1+u_2=\frac{1}{2}a_1(x,t)e^{i(\Omega t-kx)+i\varphi_1}+\frac{1}{2}a_2(x,t)e^{i(\Omega t+kx)+i\varphi_2}+\text{к. с.}$$

(7) $$E=E_1+E_2=\frac{1}{2}\mathscr{E}_1(t)F_1(x)e^{i(\omega_1 t+\varphi_2)}+\frac{1}{2}\mathscr{E}_2(t)F_2(x)e^{i(\omega_2 t+\varphi_4)}+\text{к. с.}$$

---

* Это приближение предполагает, что основную роль в электроакустическом взаимодействии играют компоненты электрического поля, перпендикулярные плоскости электродов (см., например, [5]).

$k=2\pi/d$; $\mathscr{E}_{1,2}e^{i\varphi_{3,4}}$ и $a_{1,2}e^{i\varphi_{1,2}}$ — медленные по сравнению с осцилляциями функции своих аргументов, $F_{1,2}(x)$ — функции, определяемые конфигурацией электродов (для встречно-штыревой системы с периодом $2d$ $F_1=F_2\approx\approx\cos\frac{\pi}{d}x$). Подставляя выражения (6), (7) в формулы (1)—(5) и учитывая условия пространственного и временного синхронизма взаимодействующих волн, получаем систему укороченных интегро-дифференциальных уравнений:

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\mathscr{E}_1}{\partial t}+\mathrm{Re}\dfrac{\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_{01}e^{i(\varphi_0-\varphi_3)}}{T_1}=\dfrac{\alpha_1}{l}\mathscr{E}_2\displaystyle\int_0^l[a_1\cos\psi_1-a_2\cos\psi_2]dx \\ \mathscr{E}_1\dfrac{\partial\varphi_3}{\partial t}+\mathrm{Im}\dfrac{\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_{01}e^{i(\varphi_0-\varphi_3)}}{T_1}=\dfrac{\alpha_1}{l}\mathscr{E}_2\displaystyle\int_0^l[a_2\sin\psi_2-a_1\sin\psi_1]dx, \end{cases}$$

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\mathscr{E}_2}{\partial t}+\mathscr{E}_2\,\mathrm{Re}\dfrac{1}{T_2}=-\dfrac{\alpha_2}{l}\mathscr{E}_1\displaystyle\int_0^l[a_1\cos\psi_1-a_2\cos\psi_2]dx \\ \mathscr{E}_2\dfrac{\partial\varphi_4}{\partial t}+\mathscr{E}_2\,\mathrm{Im}\dfrac{1}{T_2}=-\dfrac{\alpha_2}{l}\mathscr{E}_1\displaystyle\int_0^l[a_1\sin\psi_1-a_2\sin\psi_2]dx, \end{cases}$$

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{v}\dfrac{\partial a_{1,2}}{\partial t}\pm\dfrac{\partial a_{1,2}}{\partial x}=\mp\alpha_0\mathscr{E}_1\mathscr{E}_2\cos\psi_{1,2} \\ \dfrac{1}{v}a_{1,2}\dfrac{\partial\varphi_{1,2}}{\partial t}\pm a_{1,2}\dfrac{\partial\varphi_{1,2}}{\partial x}=\mp\alpha_0\mathscr{E}_1\mathscr{E}_2\sin\psi_{1,2}. \end{cases}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$v=\sqrt{\frac{c}{\rho}},\quad \alpha_0=\frac{H}{8C},\quad \alpha_{1,2}=\frac{2\pi Hk\omega_{1,2}}{\varepsilon},\quad T_1=\frac{1}{i\omega_1+\dfrac{1}{z_1C_0}+\dfrac{1}{r_sC_0}},$$

$$T_2=\frac{1}{i\omega_2+\dfrac{1}{z_2C_0}},\quad \frac{\tilde{\mathscr{E}}_{01}T_1}{dz_1C_0}=\mathscr{E}_{01}e^{i\varphi_0},\quad \psi_{1,2}=\varphi_3-\varphi_4-\varphi_{1,2}.$$

C_0 — емкость встречно-штыревой структуры, по порядку величины равная $\varepsilon al/4\pi d$ (a и l — соответственно апертура и длина структуры). Величина $\mathscr{E}_{01}\cdot d$ — не что иное, как амплитуда напряжения на электродах в отсутствие стрикции. В уравнениях (10) верхние знаки соответствуют индексу ⟨1⟩, а нижние — индексу ⟨2⟩.

Система (8)—(10) должна быть дополнена граничными условиями. Пусть $x=-\Delta_1$ и $x=l+\Delta_2$ — координаты границ звукопроводов, примыкающих к подложке с нанесенными на нее электродами. Вводя коэффициенты отражения от этих границ $R_{1,2}$, которые в дальнейшем будем считать действительными *, можно написать граничные условия, пересчитанные к сечениям $x=0$ и $x=l$, в следующем виде:

$$(11)\quad a_1(0,t)=|R_1|a_2(0,t),$$

$$(12)\quad a_2(l,t)=|R_2|a_1(l,t),$$

* Следует заметить, что в качестве отражающих поверхностей могут быть использованы также и поверхностные штыревые структуры, в частности однонаправленные преобразователи [6].

(13) $\varphi_1(0,\ t)=\varphi_2(0,\ t)+\pi n_1-2k\Delta_1$

(14) $\varphi_2(l,\ t)=\varphi_1(l,\ t)+\pi n_2-2k\Delta_2.$

Здесь $n_{1,2}$ принимают значения 0 и 1, первое из которых соответствует положительным значениям коэффициента отражения, второе — отрицательным.

Состояние равновесия, отличное от нулевого, т. е. стационарные амплитуды $\overline{\mathscr{E}}_1$, $\overline{\mathscr{E}}_2$, $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, находим, приравнивая в формулах (8)—(10) нулю производные по времени. Мы ограничимся здесь нахождением частного стационарного решения с не зависящими от координат фазами акустических волн $\varphi_{1,2}(x)=\text{const}$. При этом (см. (10))

(15) $\sin\psi_{1,2}=0$

и, как видно из (9), $\operatorname{Im}\dfrac{1}{T_2}=0$. Следовательно, $\omega_2=\omega_{20}=1/\sqrt{L_2C_0}$, т. е. расстройка $\Delta\omega=0$. Таким образом, возбуждение акустических волн с не зависящими от координат фазами соответствует генерации электрического поля на резонансной частоте ω_{20}. Кроме того, будем полагать, что частота возбуждающего поля $\omega_1=\omega_{10}=\dfrac{1}{\sqrt{L_1C_0}}$, отсюда $\varphi_0=\varphi_3$. Условие (15) связывает стационарные фазы следующими возможными соотношениями: $\psi_{1,2}=2\pi n$ и $\psi_{1,2}=\pi(2n+1)$ или $\varphi_1-\varphi_2=2\pi m$ и $\varphi_1-\varphi_2=(2m+1)\pi$ (n и m — целые числа). При $\varphi_1-\varphi_2=2\pi m$ стационарные амплитуды $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$ не удовлетворяют граничным условиям (11), (12). Поэтому необходимые условия существования стационарного режима с $\varphi_{1,2}(x)=\text{const}$ получаем из равенства $\varphi_1-\varphi_2=(2m+1)\pi$:

$$\begin{cases} \Delta_{1,2}=(2m_{1,2}+1)\dfrac{\lambda}{4}, & \text{если } R_{1,2}>0 \quad (16)\\ \Delta_{1,2}=m_{1,2}\dfrac{\lambda}{2}, & \text{если } R_{1,2}<0, \quad (17)\end{cases}$$

$$\left(\lambda=\frac{2\pi v}{\Omega};\quad m_{1,2}=0,1,2,3,\ldots\right)$$

В частности, как видно из формулы (17), при $\Delta_1=\Delta_2=0$ необходимо, чтобы оба коэффициента отражения были отрицательными. Учитывая все сказанное выше, находим стационарные амплитуды:

(18) $$\overline{\mathscr{E}}_1^{\,2}=\frac{1-|R_1||R_2|}{(1+|R_1|)(1+|R_2|)}\cdot\frac{1}{\alpha_0\alpha_2 l}\operatorname{Re}\frac{1}{T_2},$$

(19) $$\overline{\mathscr{E}}_2^{\,2}=\frac{1-|R_1||R_2|}{(1+|R_1|)(1+|R_2|)}\cdot\frac{1}{\alpha_0\alpha_1 l}\operatorname{Re}\frac{1}{T_1}\frac{\mathscr{E}_{01}-\overline{\mathscr{E}}_1}{\overline{\mathscr{E}}_1},$$

(20) $$\bar{a}_1=\alpha_0(\overline{\mathscr{E}}_1,\overline{\mathscr{E}}_2)\left\{x+\frac{|R_1|l(1+|R_2|)}{1-|R_1||R_2|}\right\},$$

(21) $$\bar{a}_2=-\alpha_0(\overline{\mathscr{E}}_1\overline{\mathscr{E}}_2)\left\{x-\frac{l(1+|R_2|)}{1-|R_1||R_2|}\right\}.$$

Из соотношения (19) видно, что стационарные колебания возможны лишь при условии

(22) $$\mathscr{E}_{01}>\overline{\mathscr{E}}_1=\sqrt{\frac{1-|R_1||R_2|}{(1+|R_1|)(1+|R_2|)}\frac{1}{\alpha_0\alpha_2 l}\operatorname{Re}\frac{1}{T_2}},$$

которое, как нетрудно показать, совпадает с условием неустойчивости нулевого решения.

Выходным параметром генератора является плотность потока акустической энергии S. Полагая для определенности левую границу ($x=-\Delta_1$) непрозрачной ($|R_1|=1$) и выражая S в сечении $x=l$ через амплитуду акустической волны, получаем

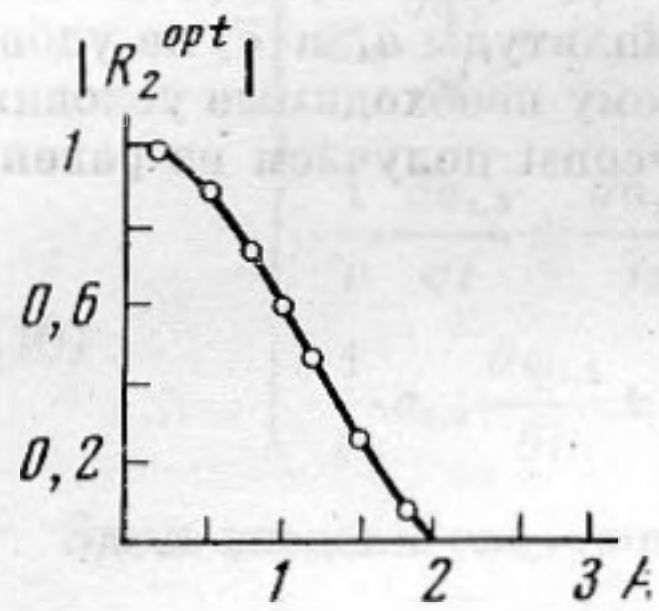
$$S=cvk^2|\bar{a}_1(l)|^2(1-R_2^2)=S_0\frac{1-|R_2|}{1+|R_2|}\left(\frac{A}{\sqrt{\frac{1-|R_2|}{1+|R_2|}}}-1\right) \tag{23}$$

где

$$S_0=\frac{cvk^2}{\alpha_1\alpha_2}\operatorname{Re}\frac{1}{T_1}\operatorname{Re}\frac{1}{T_2},\qquad A=\frac{\mathscr{E}_{01}}{\sqrt{\frac{1}{2\alpha_0\alpha_2 l}\operatorname{Re}\frac{1}{T_2}}}.$$

Из формулы (23) следует физически очевидный факт: акустический поток равен нулю в пороге самовозбуждения $\left(A=\sqrt{\frac{1-|R_2|}{1+|R_2|}}\right)$ и при полном отражении от границы ($|R_2|=1$). Оптимальное значение коэффициента отражения, которое соответствует максимуму выходной мощности при заданной накачке, определяется соотношением

$$|R_2^{\text{opt}}|=\frac{4-A^2}{4+A^2}. \tag{24}$$



Фиг. 2. Зависимость $|R_2^{\text{opt}}|$ от безразмерной накачки A при $|R_1|=1$

При этом $S_{\max}=\frac{1}{4}S_0A^2$. Из формулы (24) видно, что с увеличением амплитуды поля накачки $\mathscr{E}_{01}$, пропорциональной величине A, максимум акустической мощности смещается в сторону меньших $|R_2|$, и при $A\geqslant 2$, т. е. при

$$\mathscr{E}_{01}^2\geqslant\frac{2}{\alpha_0\alpha_2 l}\operatorname{Re}\frac{1}{T_2},\quad R_2^{\text{opt}}=0.$$

Зависимость $|R_2^{\text{opt}}|$ от A при $|R_1|=1$ изображена на фиг. 2. Оценим максимальную плотность потока энергии для некоторых значений $\mathscr{E}_{01}$, взяв в качестве подложки кристалл сегнетовой соли:

$$\varepsilon=4{,}8\cdot10^2;\ c=3\cdot10^{11}\ г\cdot см^{-1}\cdot сек^{-2};\ H\simeq3{,}5\cdot10^{-4};\ v=4\cdot10^5\ см\cdot сек^{-1}.$$

На резонансных частотах ω_{10} и ω_{20}

$$T_1=\frac{Q_1Q_s}{Q_1+Q_s}\frac{1}{\omega_{10}},\qquad T_2=\frac{Q_2}{\omega_{20}},$$

где

$$Q_1=\frac{r_1}{\omega_{10}L_1},\qquad Q_2=\frac{r_2}{\omega_{20}L_2},\qquad Q_s=\frac{r_s}{\omega_{10}L_1}.$$

Если $Q_1\sim Q_2\sim Q_s\sim100$ и $\omega_1=\omega_{10}=2\pi\cdot10^9\ сек^{-1}$ $\omega_2=\omega_{20}=0{,}9\cdot2\pi\cdot10^9\ сек^{-1}$, $l=0{,}1\ см$, то $S_0=13{,}6\ вт/см^2$ и $S_{\max}=3{,}4\ вт/см^2$ при $A=1$ ($\mathscr{E}_{01}\sim0{,}7\cdot10^3\ в/см$, $|R_2^{\text{opt}}|=0{,}6$); $S_{\max}=7{,}6\ вт/см^2$ при $A=1{,}5$ ($\mathscr{E}_{01}\sim1{,}05\cdot10^3\ в/см$, $|R_2^{\text{opt}}|=0{,}28$); $S_{\max}=13{,}6\ вт/см^2$ при $A=2$ ($\mathscr{E}_{01}\sim1{,}4\cdot10^3\ вт/см$, $R_2^{\text{opt}}=0$).

Авторы благодарны Г. Л. Гуревичу за полезные замечания и советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *С. И. Пекар.* Стрикционная электрон-фононная связь и усиление ультразвука в средах с большой диэлектрической проницаемостью. Тезисы докладов VII Всес. совещ. по квантовой акустике твердого тела. Изд. Харьковского гос. ун-та, 1972, 9—11.
2. *K. Jamsakum, C. D. W. Wilkinson.* Generation of the surface acoustic waves using the electrostrictive effect. Electronics Letters, 1972, *8*, 23, 555—557.
3. *Г. Л. Гуревич, М. С. Сандлер.* Электроакустические параметрические явления в диэлектриках. Изв. вузов, Серия радиофизика, 1974, *17*, 1, 58—67.
4. *И. С. Желудев.* Физика кристаллических диэлектриков. М., «Наука», 1968.
5. *W. R. Smith, H. M. Gerard, J. H. Cotlins, T. M. Reeder, H. J. Shaw.* Analysis of interdigital surface wave transducers circuit model. IEEE Transactions, 1969, MTT-*17*, 11, 856—864.
6. *J. H. Collins, H. M. Gerard, T. M. Reeder, H. J. Shaw.* Unidirectional Surface wave Transducer. Proceed. IEEE, 1969, *57*, 5, 836—883.

Поступила
6 февраля 1974 г.