

1. Т. Л. Гутман, А. А. Клещев. Дифракция упругих волн на упругом сфероиде. Тр. ЛОЛКИ, 1974, вып. 91, стр. 31—37.
2. Ф. М. Морз, Г. Фешбах. Методы теоретической физики М., Изд-во иностр. лит., т. 2, 1960.
3. А. Clebsch. Über die Reflexion an einer Kugelfläche. J. reine und angew. Math., 1863, 61, 195—201.
4. P. Debye. Das Verhalten von Lichtwellen in der Nähe eines Brennpunktes oder einer Brennline. Ann. Physik, 1909, 30, 4, 755—776.
5. В. А. Фок. Теория дифракции от параболоида вращения. Сб. Дифракция электромагнитных волн на некоторых телах вращения М., «Сов. радио», 1957.
6. Н. Е. Кочин. Векторное исчисление и начала тензорного анализа. М., «Наука», 1965.
7. А. А. Клещев, Л. С. Шейба. Рассеяние звуковой волны идеальными вытянутыми сфероидами. Акуст. ж., 1970, 16, 2, 264—268.
8. S. K. Datta, A. H. Shah. Axially Symmetric Waves in an Elastic Solid of Revolution J. Acoust. Soc. America, 1968, 44, 2, 473—477.
9. Е. Скучик. Простые и сложные колебательные системы. М., «Мир», 1971.
10. J. Meixner, E. W. Schäpfke. Matieusche und Sphäroidfunktionen. Berlin, 1954.

Ленинградский кораблестроительный институт

Поступила  
9 августа 1973 г.

УДК 534.29:532.28

## О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ДАВЛЕНИЯ ВОКРУГ ДВИЖУЩЕЙСЯ ПОЛОСТИ

Г. Н. Кузнецов, И. Е. Щекин

В неоднородных акустических и гидродинамических полях, вблизи твердой стенки или свободной поверхности пульсирующие полости взаимодействуют с градиентами давления и движутся поступательно. Исследование взаимосвязи радиальных пульсаций и поступательного движения полостей представляет интерес, в частности, для анализа физических закономерностей кавитационной эрозии твердых поверхностей, вблизи которых кавитационные полости захлопываются. Потенциал  $\varphi$  этого поступательного движения со скоростью  $\dot{x}$  в направлении положительной оси  $x$  для сферической полости переменного радиуса  $R(t)$  в системе координат, жестко связанной с полостью, имеет вид

$$(1) \quad \varphi = \frac{R^2 \dot{R}}{r} + \frac{R^3 \dot{x}}{2r^2} \cos \theta.$$

Давление  $P$  в любой точке идеальной и несжимаемой жидкости с плотностью  $\rho$  и давлением на бесконечности  $P_\infty$  в отсутствие внешних сил, действующих на элемент объема жидкости, определяется уравнением Лагранжа — Коши, которое после подстановки производных от потенциала  $\varphi$  записывается следующим образом:

$$(2) \quad \frac{P - P_\infty}{\rho} = \frac{R}{r} (2\dot{R}^2 + R\ddot{R}) + \frac{1}{2} \frac{R^2}{r^2} (R\ddot{x} + 5\dot{R}\dot{x}) \cos \theta + \\ + \frac{R^3}{r^3} \dot{x}^2 \left( \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right) - \frac{1}{2} \frac{R^4}{r^4} \dot{R}^2 - \\ - \frac{R^5}{r^5} \dot{R}\dot{x} \cos \theta - \frac{1}{2} \frac{R^6}{r^6} \dot{x}^2 \left( \cos^2 \theta + \frac{1}{4} \sin^2 \theta \right).$$

Для определения параметров  $\dot{R}$ ,  $\ddot{R}$ ,  $\dot{x}$ ,  $\ddot{x}$  используем при начальных условиях  $t=0$ ,  $R=R_0$ ,  $\dot{R}=0$ ,  $x=0$ ,  $\dot{x}=U$  систему дифференциальных уравнений, определяющих радиальные пульсации и поступательное движение полости во внешнем поле давления, полученную в работе [1].

Численное интегрирование полученной системы уравнений позволило установить [1], что поступательное движение существенно изменяет параметры радиальных пульсаций и, следовательно, может повлиять на характер создаваемого сжимающейся или растущей полостью поля давления.

В несколько упрощенной форме (пренебрегая величиной градиента давления по сравнению с инерционными членами, а также учитывая вязкость жидкости только в

уравнении поступательного движения) эту систему можно представить следующим образом:

$$(3) \quad R\ddot{x} + 3\dot{R}\dot{x} + 0.3k\dot{x}^2 + 9\frac{\nu}{R}\dot{x} = 0, \quad k=1 \text{ или } 0$$

$$(4) \quad \dot{R} = \pm \left[ \frac{P_{r0}}{\rho(\gamma-1)} (Z-Z^\gamma) - \frac{2P_\infty}{3\rho} (1-Z) + \frac{U^2 Z}{6} (1-Z) \right]^{1/2},$$

где  $P_{r0}$  — давление газа в полости при  $R=R_0$ ,  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости;  $Z=(R_0/R)^3$ . Знак плюс в формуле (4) соответствует расширению полости, минус — сжатию. При  $\nu=0$  и  $k=0$  уравнение (3) может быть проинтегрировано:  $\dot{x}=UZ$ . Учитывая это и используя формулу (4), найдем  $\ddot{x}$  и  $\dot{R}$ . После подстановки мы получаем

$$(5) \quad P-P_\infty = -\frac{\varepsilon}{3} \left\{ \frac{P_{r0}}{1-\gamma} [Z+(3\gamma-4)Z^\gamma] - P_0(Z-4) - \frac{\rho U^2}{4} Z(1+2Z) \right\} \pm \\ \pm \varepsilon^2 \rho^{1/2} UZ \left[ \frac{2}{3} \frac{P_{r0}}{\gamma-1} (Z-Z^{\gamma-1}) + \frac{2}{3} P_\infty (Z-1) + \frac{\rho U^2}{6} (Z-Z^2) \right]^{1/2} \cos \theta + \\ + \varepsilon^3 \rho U^2 Z^2 \left( \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right) - \frac{1}{3} \varepsilon^4 \left[ P_\infty (Z-1) - \frac{P_{r0}}{\gamma-1} (Z-Z^\gamma) - \right. \\ \left. - \frac{\rho U^2}{4} Z(Z-1) \mp \varepsilon^5 \rho^{1/2} UZ \left[ \frac{2}{3} \frac{P_{r0}}{\gamma-1} (Z-Z^\gamma) + \frac{2}{3} P_\infty (Z-1) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\rho U^2}{6} Z(1-Z) \right]^{1/2} \cos \theta - \frac{1}{2} \varepsilon^6 \rho U^2 Z^2 \left( \cos^2 \theta + \frac{1}{4} \sin^2 \theta \right) \right].$$

Здесь введено обозначение:  $\varepsilon=R/r$ . Верхние знаки перед  $\varepsilon^2$  и  $\varepsilon^5$  относятся к расширяющейся, нижние — к сжимающейся полости.

Согласно выражению (5), формально возможен расчет  $P(r, Z)$  при  $Z \in [1, Z_{\max}]$  и  $Z \in [Z_{\min}, 1]$  заданных условиях. Для определения зависимости  $P(t)$  необходима явная зависимость от времени  $R(t)$ . Такая зависимость может быть получена в результате численного интегрирования системы уравнений (3), (4). Однако для некоторых экстремальных значений  $R(t)$ , например точки перегиба кривой, изображающей зависимость  $R_i(t)$ , когда  $\dot{R}=\dot{R}_{\max}$  или для  $R=R_{\min}$ , для которой  $\dot{R}=0$ ,  $\dot{x}=\dot{x}_{\max}$ , возможно приближенное аналитическое решение задачи.

Рассмотрим в качестве примера более простой случай, когда полость заполнена паром. Будем полагать, что на кавитационную полость радиуса  $R_0$ , движущуюся в начальный момент со скоростью  $U$ , воздействует при  $t=0$  перепад внешнего давления  $P_0=P_\infty-P_a$ . Приближенное решение системы уравнений (3), (4) позволяет получить первые интегралы движения  $\dot{x}$  и  $\dot{R}$ , в том числе с учетом вязкости при поступательном движении ( $\nu \neq 0, k \neq 0$ )

$$(6) \quad \dot{x} = UZA \left\{ 1 + 0.2UA \left[ \frac{3}{2} \frac{\rho}{P_0} (Z-1) \right]^{1/2} \right\}^{-1},$$

$$(7) \quad \dot{R} = - \left[ (Z-1) \left( \frac{2}{3} \frac{P_0}{\rho} - \frac{U^2}{6} A^2 Z \right) \right]^{1/2},$$

$$A = \exp \left[ - \frac{9\nu}{R_0} \sqrt{\frac{\rho}{P_0} (1-Z^{-1})} \right].$$

Из исследования системы уравнений (6), (7) следуют соотношения

$$\left( \frac{R_{\min}}{R_i} \right)^3 = \frac{8P_0}{4P_0 + A^2 \rho U^2}, \quad \frac{\dot{x}_i}{\dot{x}_{\max}} = \frac{1}{2} + \frac{\rho U^2 A^2}{8P_0}$$

$$\left| \frac{\dot{x}_{\max}}{\dot{R}_{\max}} \right| = \frac{8\sqrt{6} P_0}{4P_0 - A^2 \rho U^2}, \quad \left| \frac{\dot{x}_i}{\dot{R}_{\max}} \right| = \frac{\sqrt{6} (4P_0 + \rho U^2 A^2)}{4P_0 - \rho U^2 A^2}.$$

В реальных ситуациях  $P_0 > \rho U^2/4$ , поэтому можно приближенно написать

$$\frac{R_{\min}}{R_i} \approx \sqrt[3]{2}, \quad \left| \frac{\dot{x}_i}{\dot{R}_{\max}} \right| \approx \sqrt{6}, \quad \frac{\dot{x}_{\max}}{\dot{x}_i} \approx 2, \quad \left| \frac{\dot{x}_{\max}}{\dot{R}_{\max}} \right| \approx 2\sqrt{6}.$$

Поскольку  $\dot{x}_{\max} > |\dot{R}_{\max}|$ , то влияние поступательного движения на распределение давления существенно изменяет распределение давления вокруг полости по сравнению со сферически симметричным движением, которое рассматривалось в работе [2].

Если значения  $R_{\min}$  и  $R_i$  вычислить при кинематической вязкости  $\nu=0$ , то  $A=1$  и давление на поверхности полости при  $\varepsilon=1$  оказывается симметричным относительно плоскости диаметрального сечения, перпендикулярного направлению движения. Формально это следует из совместного рассмотрения уравнений (2), (3), если в последнем положить нулю вязкостные члены. В этом случае равна нулю и дополнительная сила сопротивления, возникающая при нестационарных радиальных пульсациях и нестационарном поступательном движении. Однако если учесть, что при наличии неравных нулю внешних сил, действующих на полость (градиента давления или вязкостного сопротивления), в действительности  $\dot{x}=f(R, \dot{R}, t)$ , то возникает дополнительная сила

сопротивления  $F = \iint_S P dS \neq 0$ . Распределение давления по поверхности полости в этом

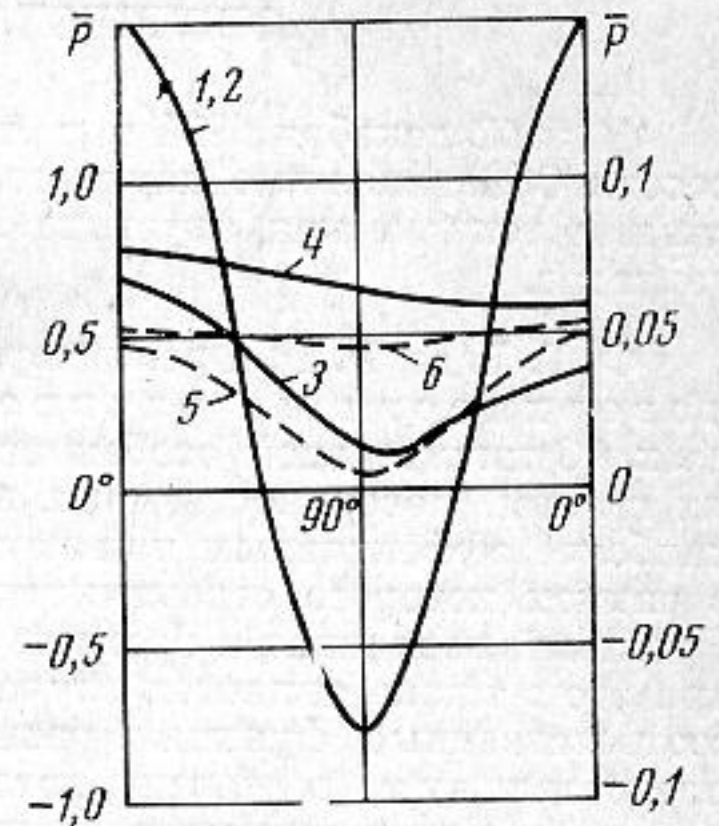
случае становится несимметричным относительно диаметральной плоскости даже при  $\varepsilon=1$ .

На фигуре приведены вычисленные по аналитическим соотношениям (5)–(8) зависимости  $\bar{P}(\theta, R_i)$  (сплошные линии) и  $P(\theta, R_{\min})$  (штриховые линии) при  $\varepsilon=1$  (совпадающие кривые 1 и 2 соответствуют  $R_i$  и  $R_{\min}$ );  $\varepsilon=0,5$  (кривые 3 и 5),  $\varepsilon=0,1$  (кривые 4 и 6). Вычисления выполнены при  $U=50$  см/сек,  $P_0=1$  атм. Масштаб для кривых 1, 2, 3, 5 обозначен слева от фигуры, для кривых 4, 6 – справа. Значения коэффициента давления  $\bar{P}$  определены по формулам

$$\bar{P}(\theta, R_i) = \frac{2(P - P_\infty)}{\rho \dot{x}_i^2}, \quad \bar{P}(\theta, R_{\min}) = \frac{2(P - P_\infty)}{\rho \dot{x}_{\max}^2}.$$

Из рассмотрения полученных результатов следует:

а) значения давлений вокруг движущейся полости заметно увеличиваются в окрестности  $\theta=0, 180^\circ$ , при  $\varepsilon \rightarrow 1$ . С уменьшением  $\varepsilon$  распределение давления приближается к сферически симметричному; б) максимальные давления на поверхности полости образуются, как и в случае захлопывания неподвижной газовой полости, при значениях  $R=R_{\min}$ ; в) полученные результаты качественно согласуются с экспериментальными данными работы [3], в которой обращается внимание на роль поступательного перемещения полостей по направлению к эрозируемой поверхности. Для объяснения физического механизма эрозии существенно, что для  $\varepsilon < 1$  давление при  $\theta=180^\circ$  больше, чем при  $\theta=0^\circ$ . Очевидно, что повышенные давления должны приводить к деформации полости и образованию кумулятивных струй, направленных в полость, что способствует интенсификации эрозии поверхности; г) существенная неоднородность распределения давления по поверхности полости должна привести к более ранней потере сферической устойчивости, чем в случае неподвижной полости [2]. Поэтому при пузырьковой форме гидродинамической кавитации на профиле из-за возникновения более высоких, чем нулевая, мод колебаний полости следует ожидать направленного излучения кавитационного шума.



Распределение давления вокруг пульсирующей полости, движущейся поступательно

## ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Н. Кузнецов, И. Е. Щекин. Влияние вязкости на динамику захлопывающейся полости, движущейся поступательно. Акуст. ж., 1973, 19, 5, 727–735.
2. Д. Д. Нерник. Проблемы кавитации. Л., «Судостроение», 1966.
3. К. Л. Клинг, Ф. Г. Хэммит. Исследование с помощью киносъемки захлопывания пузырьков, индуцируемых искровым разрядом. Теоретические основы инженерных расчетов, 1972, 4, 130–138.

Акустический институт  
Академии наук СССР  
Сухумский филиал

Поступила  
17 декабря 1973 г.  
После переработки  
16 декабря 1974 г.