ЛИТЕРАТУРА

1. *Т. Л. Гутман, А. А. Клещев.* Дифракция упругих волн на упругом сфероиде. Тр. ЛОЛКИ, 1974, вып. 91, стр. 31—37.
2. *Ф. М. Морз, Г. Фешбах.* Методы теоретической физики М., Изд-во иностр. лит., т. 2, 1960.
3. *A. Clebsch.* Über die Reflexion an einer Kugelfläche. J. reine und angew. Math., 1863, *61*, 195—201.
4. *P. Debye.* Das Verhalten von Lichtwellen in der Nähe eines Brennpunktes oder einer Brennline. Ann. Physik, 1909, *30*, 4, 755—776.
5. *В. А. Фок.* Теория дифракции от параболоида вращения. Сб. Дифракция электромагнитных волн на некоторых телах вращения М., «Сов. радио», 1957.
6. *Н. Е. Кочин.* Векторное исчисление и начала тензорного анализа. М., «Наука», 1965.
7. *А. А. Клещев, Л. С. Шейба.* Рассеяние звуковой волны идеальными вытянутыми сфероидами. Акуст. ж., 1970, *16*, 2, 264—268.
8. *S. K. Datta, A. H. Shah.* Axially Symmetric Waves in an Elastic Solid of Revolution J. Acoust. Soc. America, 1968, *44*, 2, 473—477.
9. *Е. Скучик.* Простые и сложные колебательные системы. М., «Мир», 1971.
10. *J. Meixner, E. W. Schäfke.* Matieusche und Sphäroidfunktionen. Berlin, 1954.

Ленинградский кораблестроительный
институт

Поступила
9 августа 1973 г.

УДК 534.29:532.28

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ДАВЛЕНИЯ ВОКРУГ ДВИЖУЩЕЙСЯ ПОЛОСТИ

Г. Н. Кузнецов, И. Е. Щекин

В неоднородных акустических и гидродинамических полях, вблизи твердой стенки или свободной поверхности пульсирующие полости взаимодействуют с градиентами давления и движутся поступательно. Исследование взаимосвязи радиальных пульсаций и поступательного движения полостей представляет интерес, в частности, для анализа физических закономерностей кавитационной эрозии твердых поверхностей, вблизи которых кавитационные полости захлопываются. Потенциал φ этого поступательного движения со скоростью $\dot{x}$ в направлении положительной оси x для сферической полости переменного радиуса $R(t)$ в системе координат, жестко связанной с полостью, имеет вид

$$\varphi = \frac{R^2\dot{R}}{r} + \frac{R^3\dot{x}}{2r^2}\cos\theta. \tag{1}$$

Давление P в любой точке идеальной и несжимаемой жидкости с плотностью ρ и давлением на бесконечности P_∞ в отсутствие внешних сил, действующих на элемент объема жидкости, определяется уравнением Лагранжа – Коши, которое после подстановки производных от потенциала φ записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{P-P_\infty}{\rho} = {} & \frac{R}{r}(2\dot{R}^2+R\ddot{R}) + \frac{1}{2}\frac{R^2}{r^2}(R\ddot{x}+5\dot{R}\dot{x})\cos\theta + \\ & + \frac{R^3}{r^3}\dot{x}^2\left(\cos^2\theta - \frac{1}{2}\sin^2\theta\right) - \frac{1}{2}\frac{R^4}{r^4}\dot{R}^2 - \\ & - \frac{R^5}{r^5}\dot{R}\dot{x}\cos\theta - \frac{1}{2}\frac{R^6}{r^6}\dot{x}^2\left(\cos^2\theta + \frac{1}{4}\sin^2\theta\right).\end{aligned} \tag{2}$$

Для определения параметров $\dot{R}$, $\ddot{R}$, $\dot{x}$, $\ddot{x}$ используем при начальных условиях $t=0$, $R=R_0$, $\dot{R}=0$, $x=0$, $\dot{x}=U$ систему дифференциальных уравнений, определяющих радиальные пульсации и поступательное движение полости во внешнем поле давления, полученную в работе [1].

Численное интегрирование полученной системы уравнений позволило установить [1], что поступательное движение существенно изменяет параметры радиальных пульсаций и, следовательно, может повлиять на характер создаваемого сжимающейся или растущей полостью поля давления.

В несколько упрощенной форме (пренебрегая величиной градиента давления по сравнению с инерционными членами, а также учитывая вязкость жидкости только в

уравнении поступательного движения) эту систему можно представить следующим образом:

$$(3)\qquad R\ddot{x} + 3\dot{R}\dot{x} + 0.3k\dot{x}^2 + 9\frac{\nu}{R}\dot{x} = 0, \qquad k=1 \text{ или } 0$$

$$(4)\qquad \dot{R} = \pm\left[\frac{P_{r0}}{\rho(\gamma-1)}(Z-Z^{\gamma}) - \frac{2P_{\infty}}{3\rho}(1-Z) + \frac{U^2 Z}{6}(1-Z)\right]^{1/2},$$

где P_{r0} – давление газа в полости при $R=R_0$, ν – коэффициент кинематической вязкости; $Z=(R_0/R)^3$. Знак плюс в формуле (4) соответствует расширению полости, минус – сжатию. При $\nu=0$ и $k=0$ уравнение (3) может быть проинтегрировано: $\dot{x}=UZ$. Учитывая это и используя формулу (4), найдем $\ddot{x}$ и $\dot{R}$. После подстановки мы получаем

$$(5)\qquad P-P_{\infty} = -\frac{\varepsilon}{3}\left\{\frac{P_{r0}}{1-\gamma}[Z+(3\gamma-4)Z^{\gamma}] - P_0(Z-4) - \frac{\rho U^2}{4}Z(1+2Z)\right\} \pm$$

$$\pm \varepsilon^2\rho^{1/2}UZ\left[\frac{2}{3}\frac{P_{r0}}{\gamma-1}(Z-Z^{\gamma-1}) + \frac{2}{3}P_{\infty}(Z-1) + \frac{\rho U^2}{6}(Z-Z^2)\right]^{1/2}\cos\theta +$$

$$+ \varepsilon^3\rho U^2 Z^2\left(\cos^2\theta - \frac{1}{2}\sin^2\theta\right) - \frac{1}{3}\varepsilon^4\left[P_{\infty}(Z-1) - \frac{P_{r0}}{\gamma-1}(Z-Z^{\gamma}) -\right.$$

$$\left. - \frac{\rho U^2}{4}Z(Z-1)\right] \mp \varepsilon^5\rho^{1/2}UZ\left[\frac{2}{3}\frac{P_{r0}}{\gamma-1}(Z-Z^{\gamma}) + \frac{2}{3}P_{\infty}(Z-1) +\right.$$

$$\left. + \frac{\rho U^2}{6}Z(1-Z)\right]^{1/2}\cos\theta - \frac{1}{2}\varepsilon^6\rho U^2 Z^2\left(\cos^2\theta + \frac{1}{4}\sin^2\theta\right).$$

Здесь введено обозначение: $\varepsilon=R/r$. Верхние знаки перед ε^2 и ε^5 относятся к расширяющейся, нижние – к сжимающейся полости.

Согласно выражению (5), формально возможен расчет $P(r, Z)$ при $Z\in[1, Z_{\max}]$ и

заданных условиях. Для определения зависимости $P(t)$ необходима явная зависимость от времени $R(t)$. Такая зависимость может быть получена в результате численного интегрирования системы уравнений (3), (4). Однако для некоторых экстремальных значений $R(t)$, например точки перегиба кривой, изображающей зависимость $R_i(t)$, когда $\dot{R}=\dot{R}_{\max}$ или для $R=R_{\min}$, для которой $\dot{R}=0$, $\dot{x}=\dot{x}_{\max}$, возможно приближенное аналитическое решение задачи.

Рассмотрим в качестве примера более простой случай, когда полость заполнена паром. Будем полагать, что на кавитационную полость радиуса R_0, движущуюся в начальный момент со скоростью U, воздействует при $t=0$ перепад внешнего давления $P_0=P_{\infty}-P_d$. Приближенное решение системы уравнений (3), (4) позволяет получить первые интегралы движения $\dot{x}$ и $\dot{R}$, в том числе с учетом вязкости при поступательном движении ($\nu\neq0$, $k\neq0$)

$$(6)\qquad \dot{x} = UZA\left\{1 + 0.2UA\left[{}^{3}/_{2}\frac{\rho}{P_0}(Z-1)\right]^{1/2}\right\}^{-1},$$

$$(7)\qquad \dot{R} = -\left[(Z-1)\left({}^{2}/_{3}\frac{P_0}{\rho} - \frac{U^2}{6}A^2 Z\right)\right]^{1/2},$$

$$A = \exp\left[-\frac{9\nu}{R_0}\sqrt{\frac{\rho}{P_0}(1-Z^{-1})}\right].$$

Из исследования системы уравнений (6), (7) следуют соотношения

$$\left(\frac{R_{\min}}{R_i}\right)^3 = \frac{8P_0}{4P_0+A^2\rho U^2}, \qquad \frac{\dot{x}_i}{\dot{x}_{\max}} = \frac{1}{2} + \frac{\rho U^2 A^2}{8P_0}$$

$$\left|\frac{\dot{x}_{\max}}{\dot{R}_{\max}}\right| = \frac{8\sqrt{6}\,P_0}{4P_0-A^2\rho U^2} \qquad \left|\frac{\dot{x}_i}{\dot{R}_{\max}}\right| = \frac{\sqrt{6}(4P_0+\rho U^2A^2)}{4P_0-\rho U^2A^2}.$$

В реальных ситуациях $P_0>\rho U^2/4$, поэтому можно приближенно написать

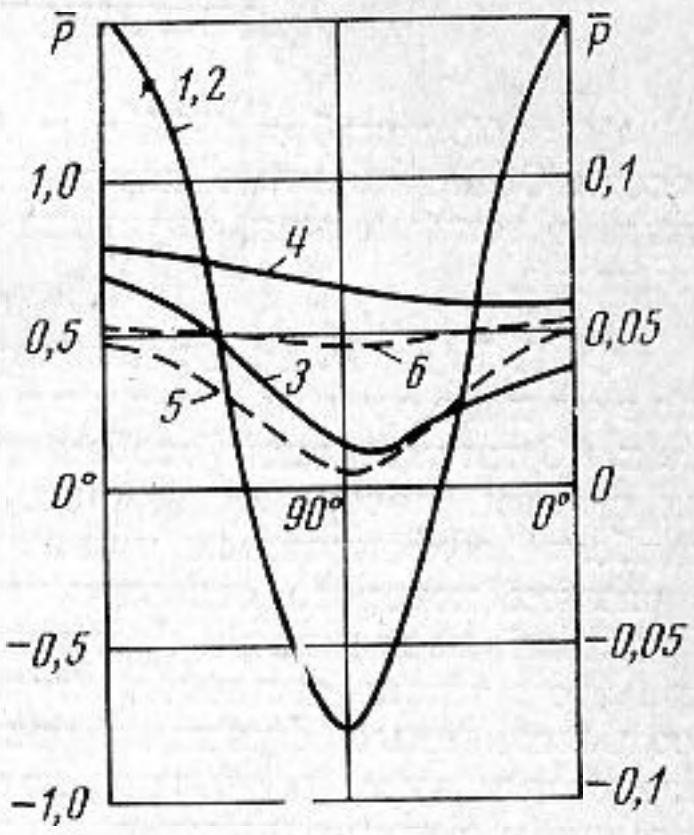
$$\frac{R_{\min}}{R_i} \simeq \sqrt[3]{2}, \qquad \left|\frac{\dot{x}_i}{R_{\max}}\right| \simeq \sqrt{6}, \qquad \frac{\dot{x}_{\max}}{\dot{x}_i} \simeq 2, \qquad \left|\frac{\dot{x}_{\max}}{\dot{R}_{\max}}\right| \approx 2\sqrt{6}.$$

Поскольку $\dot{x}_{\max} > |\dot{R}_{\max}|$, то влияние поступательного движения на распределение давления существенно изменяет распределение давления вокруг полости по сравнению со сферически симметричным движением, которое рассматривалось в работе [2].

Если значения $R_{\min}$ и R_i вычислить при кинематической вязкости $\nu=0$, то $A=1$ и давление на поверхности полости при $\varepsilon=1$ оказывается симметричным относительно плоскости диаметрального сечения, перпендикулярного направлению движения. Формально это следует из совместного рассмотрения уравнений (2), (3), если в последнем положить нулю вязкостные члены. В этом случае равна нулю и дополнительная сила сопротивления, возникающая при нестационарных радиальных пульсациях и нестационарном поступательном движении. Однако если учесть, что при наличии неравных нулю внешних сил, действующих на полость (градиента давления или вязкостного сопротивления), в действительности $\dot{x}=f(R, \dot{R}, t)$, то возникает дополнительная сила сопротивления $F=\iint\limits_S P\,dS \neq 0$. Распределение давления по поверхности полости в этом случае становится несимметричным относительно диаметральной плоскости даже при $\varepsilon=1$.

На фигуре приведены вычисленные по аналитическим соотношениям (5) – (8) зависимости $\bar{P}(\theta, R_i)$ (сплошные линии) и $P(\theta, R_{\min})$ (штриховые линии) при $\varepsilon=1$ (совпадающие кривые *1* и *2* соответствуют R_i и $R_{\min}$); $\varepsilon=0{,}5$ (кривые *3* и *5*), $\varepsilon=0{,}1$ (кривые *4* и *6*). Вычисления выполнены при $U=50$ *см/сек*, $P_0=1$ *атм*. Масштаб для кривых *1*, *2*, *3*, *5* обозначен слева от фигуры, для кривых *4*, *6* – справа. Значения коэффициента давления $\bar{P}$ определены по формулам

$$\bar{P}(\theta, R_i) = \frac{2(P - P_\infty)}{\rho \dot{x}_i^2}, \quad \bar{P}(\theta, R_{\min}) = \frac{2(P - P_\infty)}{\rho \dot{x}_{\max}^2}.$$



Распределение давления вокруг пульсирующей полости, движущейся поступательно

Из рассмотрения полученных результатов следует: а) значения давлений вокруг движущейся полости заметно увеличиваются в окрестности $\theta=0, 180°$, при $\varepsilon \to 1$. С уменьшением ε распределение давления приближается к сферически симметричному; б) максимальные давления на поверхности полости образуются, как и в случае захлопывания неподвижной газовой полости, при значениях $R=R_{\min}$; в) полученные результаты качественно согласуются с экспериментальными данными работы [3], в которой обращается внимание на роль поступательного перемещения полостей по направлению к эрозируемой поверхности. Для объяснения физического механизма эрозии существенно, что для $\varepsilon<1$ давление при $\theta=180°$ больше, чем при $\theta=0°$. Очевидно, что повышение давления должно приводить к деформации полости и образованию кумулятивных струй, направленных в полость, что способствует интенсификации эрозии поверхности; г) существенная неоднородность распределения давления по поверхности полости должна привести к более ранней потере сферической устойчивости, чем в случае неподвижной полости [2]. Поэтому при пузырьковой форме гидродинамической кавитации на профиле из-за возникновения более высоких, чем нулевая, мод колебаний полости следует ожидать направленного излучения кавитационного шума.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. Н. Кузнецов, И. Е. Щекин.* Влияние вязкости на динамику захлопывающейся полости, движущейся поступательно. Акуст. ж., 1973, *19*, 5, 727—735.
2. *Д. Д. Перник.* Проблемы кавитации. Л., «Судостроение», 1966.
3. *К. Л. Клинг, Ф. Г. Хэммит.* Исследование с помощью киносъемки захлопывания пузырьков, индуцируемых искровым разрядом. Теоретические основы инженерных расчетов, 1972, *4*, 130—138.

Акустический институт
Академии наук СССР
Сухумский филиал

Поступила
17 декабря 1973 г.
После переработки
16 декабря 1974 г.