АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXI 1975 Вып. 3

УДК 539.3

ВОЛНЫ РЕЛЕЯ В ИЗОТРОПНОЙ РЕГУЛЯРНОЙ СЛОИСТОЙ СРЕДЕ

В. Г. Савин, И. А. Шульга

В точной постановке решена задача о распространении поверхностных волн Релея в регулярном слоистом полупространстве. Исследована зависимость фазовой скорости от параметров упругости среды. Приведена оценка применимости приближенного решения по теории приведенных модулей.

Приближенное исследование поверхностных волн Релея в изотропной регулярной слоистой полуплоскости можно провести на континуальной трансверсально-изотропной модели [1—6], эквивалентной в определенном смысле слоистой среде. Другой способ, основанный на приближенных дифференциально-разностных уравнениях [1, 2], изложен в работе [4]. Общим недостатком этих методов является то, что они справедливы лишь для очень длинных (по сравнению с толщиной слоев) волн. Ниже приводится точное решение задачи о поверхностных волнах Релея в изотропной регулярной слоистой среде.

Пусть изотропная полуплоскость $-\infty<x<+\infty$, $z\geqslant 0$ представляет собой попеременно чередующиеся слои двух типов толщины h_1 и h_2 с модулями упругости λ_1, μ_1 и λ_2, μ_2, плотностями ρ_1 и ρ_2 соответственно. Потенциалы волн растяжения – сжатия $\Phi(x, z, t)$ и сдвига $\Psi(x, z, t)$ поверхностной волны Релея представляются [7] в виде $\Phi(z)\exp(ikx-i\omega t)$ и $\Psi(z)\exp\cdot(ikx-i\omega t)$. При этом амплитуды $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ должны удовлетворять уравнениям

$$\Phi''+\Omega_p^2\Phi=0, \quad \Psi''+\Omega_s^2\Psi=0, \tag{1}$$

условиям непрерывности амплитуд перемещений и напряжений

$$\begin{aligned} &u(z)=k\Phi+\Psi', \quad w(z)=\Phi'+k\Psi, \\ &\sigma_{zz}(z)=\mu(2k^2-k_s^2)\Phi+2\mu k\Psi', \\ &\sigma_{zx}(z)=2\mu_k\Phi'+\mu(2k^2-k_s^2)\Psi, \end{aligned} \tag{2}$$

на границах $z=z_j$ раздела слоев, граничным условиям на свободной поверхности $z=0$

$$\begin{aligned} &(2k^2-k_{s,1}^2)\Phi(0)+2k\Psi'(0)=0, \\ &2k\Phi'(0)+(2k^2-k_{s,1}^2)\Psi(0)=0. \end{aligned} \tag{3}$$

и условиям затухания при $z\to+\infty$.

В соотношениях (1) — (3) постоянные λ, μ, $k_p=\omega/c_p$,

$$k_s=\omega/c_s, \quad c_p=\sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}, \quad c_s=\sqrt{\mu/\rho},$$

$$\Omega_p^2=k_p^2-k^2,$$

$\Omega_s^2=k_s^2-k^2$ имеют индексы «1» или «2» в зависимости от того, к какому из двух слоев они относятся.

Общее решение уравнений (1), позволяющее удовлетворить условиям (2) и (3), представим в виде

$$\Phi(z)=A_{2n-1}\sin\Omega_{p1}(z-nh+h_2)+B_{2n-1}\cos\Omega_{p1}(z-nh+h_2),$$
$$\Psi(z)=C_{2n-1}\sin\Omega_{s1}(z-nh+h_2)+D_{2n-1}\cos\Omega_{s1}(z-nh+h_2),$$
$$nh-h<z<nh-h_2;$$
$$\Phi(z)=A_{2n}\sin\Omega_{p2}(z-nh)+B_{2n}\cos\Omega_{p2}(z-nh),$$
$$\Psi(z)=C_{2n}\sin\Omega_{s2}(z-nh)+D_{2n}\cos\Omega_{s2}(z-nh),$$
$$-nh-h_2<z<nh;\quad h=h_1+h_2,\quad n=1,2\ldots$$

Для определения постоянных интегрирования A_n, B_n, C_n и D_n из граничных условий (3) и условий сопряжения (2) мы получаем следующую бесконечную систему алгебраических уравнений:

$$R_0\mathbf{X}_1=0,\quad \mathbf{X}_{2n-1}-R_1S_2\mathbf{X}_{2n}=0, \tag{4}$$
$$X_{2n}-R_2S_1\mathbf{X}_{2n+1}=0,$$

где введены вектора $\mathbf{X}_j=[B_j, C_j, A_j, D_j]^T$ и матрицы

$$R_1=\begin{bmatrix} M_1^{-1}M_2; & 0\\ 0; & N_1^{-1}N_2\end{bmatrix};\quad R_2=\begin{bmatrix} M_2^{-1}M_1; & 0\\ 0; & N_2^{-1}N_1\end{bmatrix}.$$

$$M_j=\{m_{rs,j}\}=\begin{bmatrix} k_{pj}; & \Omega_{sj}\\ -kk_{pj}\lambda_j-(\lambda_j+2\mu_j)\Omega_{pj}; & [-k\lambda_j+(\lambda_j+2\mu_j)k_{sj}]\Omega_{sj}\end{bmatrix}.$$

$$N_j=\{n_{rs,j}\}=\begin{bmatrix} \Omega_{pj}; & k_{sj}\\ \mu_j(k+k_{pj})\Omega_{pj}; & \mu_j(kk_{sj}-\Omega_{sj}^2)\end{bmatrix}.$$

$$R_0=\begin{bmatrix} m_{21,1}\cos h_1\Omega_{p1}; & m_{22,1}\cos h_1\Omega_{s1}; & -m_{21,1}\sin h_1\Omega_{p1}; & m_{22,1}\sin h_1\Omega_{s1}\\ n_{21,1}\sin h_1\Omega_{p1}; & -n_{22,1}\sin h_1\Omega_{s1}; & n_{21,1}\cos h_1\Omega_{p1}; & n_{22,1}\cos h_1\Omega_{s1}\end{bmatrix}.$$

$$S_j=\begin{bmatrix} \cos h_j\Omega_{pj}; & 0; & -\sin h_j\Omega_{pj}; & 0\\ 0; & \cos h_j\Omega_{sj}; & 0; & \sin h_j\Omega_{sj}\\ \sin n\,h_j\Omega_{pj}; & 0; & \cos h_j\Omega_{pj}; & 0\\ 0; & -\sin h_j\Omega_{sj}; & 0; & \cos h_j\Omega_{sj}\end{bmatrix}.$$

Все уравнения системы (4), за исключением первого, будут удовлетворены, если положить [8]

$$\mathbf{X}_{2n-1}=\chi^nR_1S_2\mathbf{X},\quad \mathbf{X}_{2n}=\chi^n\mathbf{X},\quad n=1,2\ldots$$

и постоянную $\chi\neq0$ и вектор $X=[B, C, A, D]^T$ определить из однородной системы

$$R_2S_1R_1S_2-\frac{1}{\chi}E\Big)\mathbf{X}=0. \tag{5}$$

Здесь E — единичная матрица.

Корни характеристического уравнения системы (5) следующие:

$$\chi_{1,3}=b_1\pm\sqrt{b_1^2-1};\quad \chi_{2,4}=b_2\pm\sqrt{b_2^2-1},$$

причем

$$4b_{1,2}=k_1\pm\sqrt{k_1^2-4k_2+8},\quad k_1=a_{11}+a_{22}+a_{33}+a_{44},$$
$$k_2=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}+a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31}+a_{11}a_{44}-$$
$$-a_{14}a_{41}+a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}+a_{22}a_{44}-a_{24}a_{42}+a_{33}a_{44}-a_{34}a_{43},$$

и матрица

$$\{a_{rs}\}=R_2S_1R_1S_2.$$

Каждому из неравных между собой характеристических чисел соответствует линейно независимый собственный вектор

$$\mathbf{Y}_j=[b_j, C_j, a_j, d_j]^T.$$

Пусть χ_1 и χ_2 действительны и $|\chi_1|<1$, $|\chi_2|<1$ (тогда $|\chi_3|>1$, $|\chi_4|>1$). В этом случае условия затухания при $z\to+\infty$ будут выполнены, если векторы $\mathbf{X}_j$ представить в виде

$$\mathbf{X}_{2n-1}=R_1S_2(T_1\chi_1{}^n\mathbf{Y}_1+T_2\chi_2{}^n\mathbf{Y}_2),$$

$$\mathbf{X}_{2n}=T_1\chi_1{}^n\mathbf{Y}_1+T_2\chi_2{}^n\mathbf{Y}_2.$$

Произвольные постоянные T_1 и T_2 следует определять из первого уравнения системы (4)

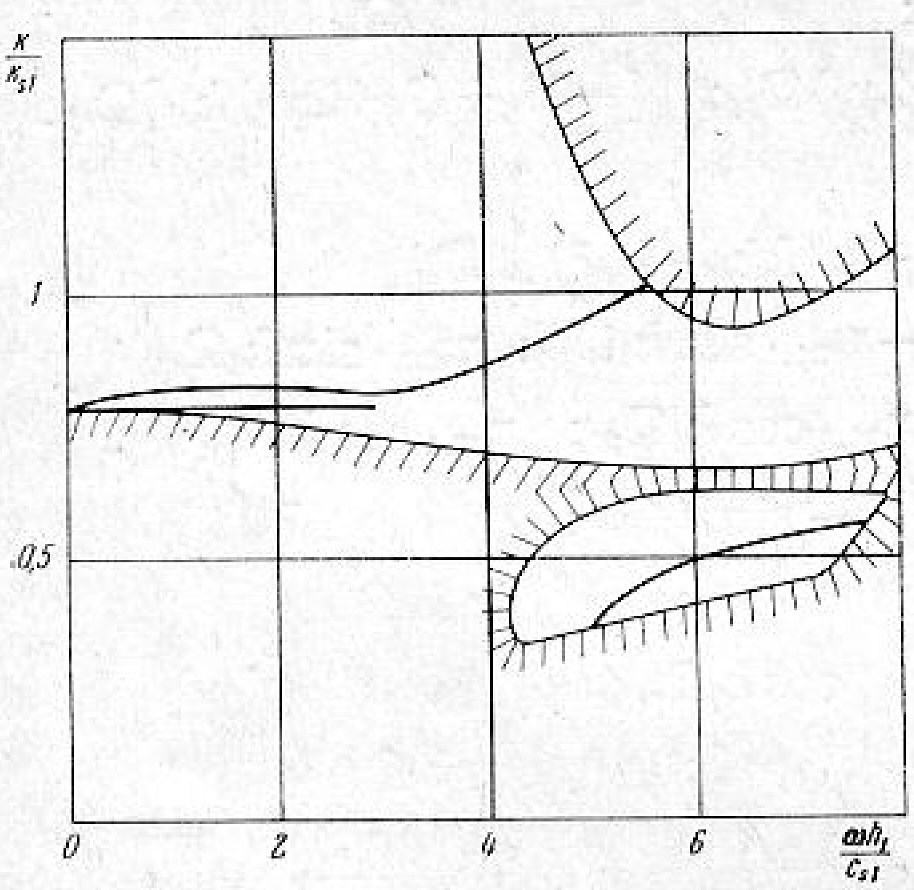
$$R_0R_1S_2(T_1\chi_1\mathbf{Y}_1+T_2\chi_2\mathbf{Y}_2)=0.$$

Эта система разрешима при условии

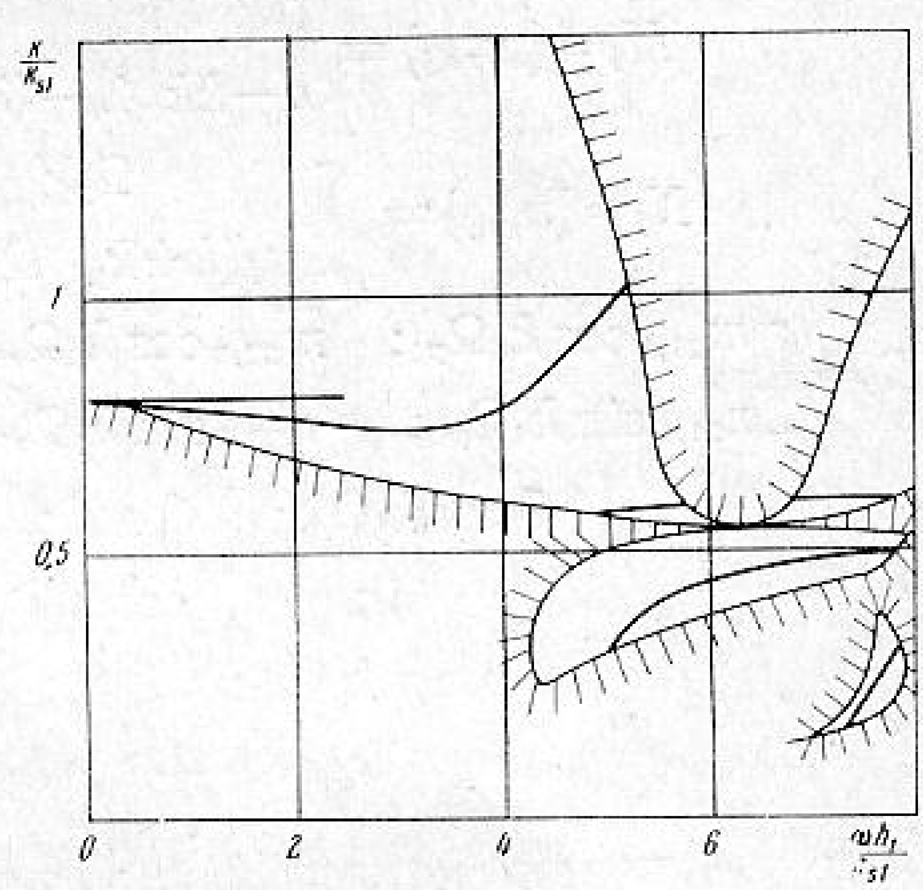
$$\det\{R_0R_1S_2\mathbf{Y}_1;\ R_0R_1S_2\mathbf{Y}_2\}=0, \tag{6}$$

которое является дисперсионным уравнением для определения фазовых скоростей волн Релея.

Численный анализ изменения фазовой скорости с частотой при различных отношениях μ_2/μ_1; ρ_2/ρ_1, h_2/h_1 был проведен на БЭСМ-4. Характер-



Фиг. 1



Фиг. 2

ные зависимости безразмерного волнового числа k/k_{s1} от параметра $\omega h_1/c_{s1}$ приведены на фиг. 1 (при $\mu_2/\mu_1=10$; $\rho_2/\rho_1=0{,}5$, $h_2/h_1=3/7$) и фиг. 2 (при $\mu_2/\mu_1=30$; $\rho_2/\rho_1=0{,}5$; $h_2/h_1=3/7$). Штриховкой отмечены зоны, в которых не выполняется условие существования поверхностной волны Релея. Приведенные расчеты показывают, что волны Релея в слоистом полупространстве диспергируют, трансверсально-изотропная модель этого не отражает. Существуют зоны частот, в которых решений не может быть.

Поверхностные волны имеют кусочно-непрерывный спектр. С уменьшением длины волны, когда она становится соизмеримой с периодом структуры $\omega h_1/c_{s1}\geqslant 5$ существуют частоты, при которых волны Релея имеют несколько скоростей распространения.

Результаты точного решения сравнивались с приближенным, когда слоистая среда моделировалась трансверсально-изотропной с приведенными параметрами [5]. Числовые результаты для приведенной среды изображены на фигурах прямыми линиями. Хорошее совпадение (не превышающее 5%) между точной и приближенной теорией имеет место только в случае длинных волн. Для выбранных выше числовых значений параметров это будет при $\omega h_1 / c_{s1} \leqslant 0{,}3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. В. Болотин.* Прочность, устойчивость и колебания многослойных пластин. Сб. Расчеты на прочность. М., «Машиностроение», 1965, 11, 31–62.
2. *В. В. Болотин.* Об изгибе плит, состоящих из большого числа слоев. Изв. АН СССР, Механика и маш., 1964, 1, 61–66.
3. *Л. М. Бреховских.* Волны в слоистых средах. М., Изд-во АН СССР, 1957.
4. *Ю. Н. Новичков.* Поверхностные волны в слоистой упругой среде. Тр. МЭИ. Динамика и прочность машин, 1972, 101, 129–136.
5. *Л. П. Хорошун.* Зависимость между напряжениями и деформациями в слоистых средах. Прикладная механика, 1966, *2*, 2, 14–19.
6. *К. Т. Сан, Дж. Д. Ахенбах, Г. Герман.* Континуальная теория слоистой среды. Тр. амер. об-ва инж.-механиков, Прикладная механика, М., «Мир», 1968, *35*, 38–47.
7. *И. Н. Снеддон, Д. С. Берри.* Классическая теория упругости, М., Физматгиз, 1961.
8. *М. О. Шульга.* Про розв'язок задач механіки для періодичних структур. ДАН УРСР, серія А, 1971, 11, 1055–1058.

Институт механики
Академии наук УССР

Поступила
19 ноября 1973 г.