Влияние полимерных добавок на рост каверны можно оценить по максимальному размеру, до которого каверна вырастает в процессе своего расширения из ядра произвольного размера. Для количественной оценки этого влияния был введен параметр В, равный отношению максимального диаметра каверны в растворе полимера с концентрацией 10^{-4} *г/см*^{3} к ее максимальному диаметру в воде. Вычисления максимального диаметра каверн $D_{\max}$ производились для режимов течения, характеризуемых при данной скорости потока одинаковыми степенями развития кавитации. Различие в величине растягивающих напряжений и времени пребывания каверны в зоне их действия при этом можно учесть, если воспользоваться установленной в [4] связью между $D_{\max}$ и параметрами потока: $D_{\max}\sim\varkappa\cdot[1-(1-\varkappa)C_{p\,\min}]^{-1/3}$, где $C_{p\,\min}=-0{,}54$ — минимальный коэффициент давления крыла, $\varkappa=1+k/C_{p\,\min}$ — параметр, характеризующий величину максимальных растягивающих напряжений. Результаты вычислений величины B приведены в табл. 2, откуда видно, что влияние полимерных добавок на динамику каверн в стадии роста также не проявляется.

ЛИТЕРАТУРА

1. *H. S. Fogler, J. D. Goddard.* Collapse of spherical cavities in viscoelastic fluids. Phys. Fluid, 1970, *13*, 5, 1135—1141.
2. *А. М. Аванесов, И. А. Аветисян.* Динамика кавитационной полости в неньютоновской жидкости. Механика жидкости и газа, 1973, 4, 170—172.
3. *В. П. Морозов, В. П. Ильин.* Экспериментальное определение отношения энергии кавитационного шума к энергии пузырьков. Акуст. ж., 1974, *20*, 3, 409—413.
4. *Ю. Л. Левковский.* Статистические характеристики пузырьковой кавитации. Акуст. ж., 1973, *19*, 2, 200—206.

Поступила
22 января 1974 г.

УДК 534.26

СИНТЕЗ ЛИНЕЙНОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ С ПОМОЩЬЮ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ВЫТЯНУТОГО СФЕРОИДА

А. А. Клещев

Линейный излучатель можно рассматривать как вырожденную в стержень вытянутую сфероидальную антенну и при решении задачи синтеза обратиться к вытянутым сфероидальным координатам и собственным функциям вытянутого сфероида. Возьмем в качестве исходных интегральные уравнения для распределения P_s или его нормальной производной $\partial P_s/\partial n$ антенны с криволинейной поверхностью [1]:

$$R_1(\theta,\varphi)=\lim_{R\to\infty}\frac{R}{e^{ikR}}\frac{1}{4\pi}\int\limits_s P_s(Q)\frac{\partial G_1}{\partial n}\,dS, \tag{1}$$

$$R_1(\theta,\varphi)=-\lim_{R\to\infty}\frac{R}{e^{ikR}}\frac{1}{4\pi}\int\limits_s \frac{\partial P_s(Q)}{\partial n}G_2\,dS, \tag{2}$$

где $R_1(\theta, \varphi)$ — заданная диаграмма направленности; θ и φ — полярный и азимутальный сферические углы; G_1 — функция Грина, исчезающая на поверхности интегрирования; G_2 — функция Грина, обладающая нулевой производной по нормали к поверхности S; S — замкнутая криволинейная поверхность с непрерывной внешней нормалью $\mathbf{n}$ (нас будет интересовать поверхность сфероидальной формы); Q — точка поверхности S; R — расстояние от начала координатной системы до точки наблюдения.

Разложения функций Грина G_1 и G_2 по вытянутым сфероидальным волновым функциям приводятся в [1, 2]:

$$\begin{aligned}G_1(\xi,\eta,\varphi;\xi',\eta',\varphi')&=2ik\sum_{n\geqslant m}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(2-\delta_{0,m})\,\bar S_{m,n}(C,\eta)\cdot\\&\cdot\bar S_{m,n}(C,\eta')\cos m(\varphi-\varphi')\,[R^{(1)}_{m,n}(C,\xi')\,R^{(3)}_{m,n}(C,\xi)-\\&-\frac{R^{(1)}_{m,n}(C,\xi_0)}{R^{(3)}_{m,n}(C,\xi_0)}\,R^{(3)}_{m,n}(C,\xi)\,R^{(3)}_{m,n}(C,\xi')],\end{aligned} \tag{3}$$

$$(4)\qquad G_2(\xi,\eta,\varphi:\xi'\,\eta'\,\varphi')=2ik\sum_{n\geqslant m}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(2-\delta_{0,m})\bar S_{m,n}(C,\eta)\cdot$$

$$\cdot\bar S_{m,n}(C,\eta')\cos m(\varphi-\varphi')\left[R^{(1)}_{m,n}(C,\xi')R^{(3)}_{m,n}(C,\xi)-\right.$$

$$\left.-\frac{R^{(1)\prime}_{m,n}(C,\xi_0)}{R^{(3)\prime}_{m,n}(C,\xi_0)}R^{(3)}_{m,n}(C,\xi)R^{(3)}_{m,n}(C,\xi')\right],$$

здесь ξ, η, φ — сфероидальные координаты точки наблюдения; ξ', η', φ' — координаты точечного источника; $\bar S_{m,n}(C,\eta)$ – нормированная угловая сфероидальная функция 1-го рода; $R^{(1)}_{m,n}(C,\xi')$ и $R^{(3)}_{m,n}(C,\xi')$ – радиальные функции 1-го и 3-го родов соответственно;

$$\delta_{0,m}=\begin{cases}1 & \text{при}\quad m=0\\ 0 & \text{при}\quad m>0.\end{cases}$$

Непосредственно из (3) и (4) видно, что функции Грина представляют собой суммы потенциалов в падающей (сферической) и рассеянной (мягким — в случае G_1 и жестким — в случае G_2 сфероидами) волнах. Естественно, что вырожденный в стержень сфероид ($\xi_0=1{,}0$) не будет рассеивать, поэтому функции Грина G_1 и G_2 перейдут в одну и ту же двумерную функцию:

$$G_{01}=G_{02}=2ik\sum_{n=0}^{\infty}\bar S_{0,n}(C,\eta)\bar S_{0,n}(C,\eta')R^{(1)}_{0,n}(C,\xi')R^{(3)}_{0,n}(C,\xi).$$

С учетом сделанных замечаний и круговой симметрии (отсутствие зависимости от угла φ) интегральные уравнения (1) и (2) примут вид

$$(5)\qquad R_1(\theta)=\lim_{R\to\infty}\frac{R}{e^{ikR}}\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}P_s(Q)h_0(\xi_0^2-1)\frac{\partial G_{01}}{\partial\xi'}d\eta',$$

$$(6)\qquad R_1(\theta)=-\lim_{R\to\infty}\frac{R}{e^{ikR}}\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{\partial P_s(Q)}{\partial\xi'}G_{02}h_0(\xi_0^2-1)d\eta',$$

где h_0 — половина фокусного расстояния.

Обратим внимание на член (ξ_0^2-1), стоящий под интегралом в (5) и (6) и обращающийся в нуль при $\xi_0=1$. Он показывает, что при вырождении поверхностной антенны в линейный излучатель заданная диаграмма направленности $R_1(\theta)$ не может быть реализована конечными значениями распределения P_s или $\partial P_s/\partial\xi'$. Однако произведения: $P_s(Q)(\xi_0^2-1)=P_s^*(Q)$ и $\dfrac{\partial P_s(Q)}{\partial\xi'}(\xi_0^2-1)=\dfrac{\partial P_s^*(Q)}{\partial\xi'}$ будут конечными величинами и их-то мы и будем рассматривать в качестве решений уравнений (5) и (6). После применения обычной асимптотики ($\xi\to\infty$) к радиальным функциям 3-го рода $R^{(3)}_{0,n}$ (C,ξ) интегральные уравнения записываются в виде

$$(7)\qquad R_1(\eta)=\int_{-1}^{+1}P_s^*(Q)k^{(1)}(\eta,\eta')d\eta',$$

$$(8)\qquad R_1(\eta)=\int_{-1}^{+1}\frac{\partial P_s^*(Q)}{\partial\xi'}k^{(2)}(\eta,\eta')d\eta',$$

где $\eta=\cos\theta$;

$$k^{(1)}(\eta,\eta')=h_0\sum_{n=0}^{\infty}i^{-n}\bar S_{0,n}(C,\eta)\bar S_{0,n}(C,\eta')R^{(1)\prime}_{0,n}(C,1);$$

$$k^{(2)}(\eta,\eta')=-h_0\sum_{n=0}^{\infty}i^{-n}\bar S_{0,n}(C,\eta)\bar S_{0,n}(C,\eta')R^{(1)}_{0,n}(C,1).$$

Если учесть, что ядро $k^{(2)}(\eta, \eta')$ представляет (с точностью до постоянного множителя) потенциал плоской волны $e^{ikR\eta}$, то легко видеть, что уравнение линейного излучателя (8) совпадает с описанным в литературе [3, 4]. Что же касается уравнения (7), то оно в теории синтеза линейного излучателя не рассматривалось, хотя в акустических задачах оно не менее важно, чем уравнение (8). Собственные значения $\Lambda_{0,n}^{(1)}$ и $\Lambda_{0,n}^{(2)}$ ядер $k^{(1)}(\eta, \eta')$ и $k^{(2)}(\eta, \eta')$ соответственно найдем, как и прежде [1], раскрывая определитель:

$$\Lambda_{0,n}^{(1)} = \frac{1}{h_0} i^{+n} [R_{0,n}^{(1)'}(C, 1)]^{-1},$$

$$\Lambda_{0,n}^{(2)} = \frac{-1}{h_0} i^{+n} [R_{0,n}^{(1)}(C, 1)]^{-1}.$$

Обобщенные коэффициенты Фурье диаграммы $R_1(\eta)$ даются выражением

$$a_n = \int_{-1}^{+1} \bar{S}_{0,n}(C, \eta') R_1(\eta') d\eta'.$$

Коэффициенты Фурье искомых распределений P_s^* и $\partial P_s^*/\partial\xi'$ равны:

$$b_n^{(1)} = \Lambda_{0,n}^{(1)} a_n, \qquad b_n^{(2)} = \Lambda_{0,n}^{(2)} a_n.$$

Решения интегральных уравнений (7) и (8) будут принадлежать к классу L_2 только в том случае, если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (b_n)^2$ сходится. Это требование означает, что коэффициенты Фурье, a_n должны убывать с ростом индекса n быстрее, чем $R_{0,n}^{(1)'}(C, 1)$ или $R_{0,n}^{(1)}(C, 1)$. Можно показать, что в общем случае антенны в форме сфероида (уравнения (1) и (2)) и коэффициенты Фурье a_n должны убывать, как $R_{m,n}^{(1)}(C, \xi_1)$ или $R_{m,n}^{(1)'}(C, \xi_1)$, причем $\xi_1 < \xi_0$, а ξ_0 — радиальная координата поверхности антенны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. А. Клещёв.* Синтез акустической антенны с криволинейной (сфероидальной) поверхностью в широком диапазоне волновых размеров. Акуст. ж., 1972, *18*, 3, 413—420.
2. *К. Фламмер.* Таблицы волновых сфероидальных функций. М., ВЦАН СССР, 1962.
3. *Е. Г. Зелкин.* Построение излучающей системы по заданной диаграмме направленности. М., Госэнергоиздат, 1963.
4. *Е. М. Минкович, В. П. Яковлев.* Теория синтеза антенн. М., «Советское радио», 1969.

Ленинградский кораблестроительный институт

Поступила 28 мая 1973 г.