

ОБ ИЗЛУЧЕНИИ ЗВУКОВЫХ ВОЛН ОСЦИЛЛИРУЮЩИМ ПОРШНЕМ

В. П. Докучаев

Сравнительный анализ исследований по излучению звука осциллирующим поршнем содержится в работах [1, 2]. Ниже дано решение задачи о генерации волн конечной амплитуды поршнем, которое обобщает известное решение Бесселя — Фубини и описывает эволюцию плоской волны от границы поршня до места образования разрыва в волне. Обсуждается движение твердых частиц в поле этой волны.

Уравнение для возмущений скорости v в простой волне, распространяющейся в идеальном газе в направлении оси x , имеет вид [3]

$$(1) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + (c_0 + \varepsilon v) \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

где c_0 — скорость звука, $\varepsilon = (\gamma + 1)/2$ и γ — отношение теплоемкостей. Граничное условие на поверхности движущегося поршня будет

$$(2) \quad v(x, t) |_{x=a(t)} = \frac{da}{dt},$$

где $a(t)$ — закон движения поршня. Метод характеристик дает решение задачи (1), (2) только в неявной параметрической форме [3]

$$(3) \quad v(x, t) = \frac{da(\tau)}{d\tau}, \quad \tau - t = \frac{a(\tau) - x}{c_0 + \varepsilon \frac{da}{d\tau}}.$$

Для акустики представляет интерес гармонический закон движения $a(t) = a_0(1 - \cos \omega t)$, когда

$$(4) \quad \frac{v(x, t)}{c_0} = M \sin(\omega\tau), \quad \omega(t - \tau) = \frac{k(x - a) + M \cos \omega\tau}{1 + \varepsilon M \sin(\omega\tau)},$$

где $k = \omega/c_0$, $M = (a\omega/c_0)$ — акустическое число Маха. При условии $\varepsilon M \ll 1$ уравнения (4) принимают вид

$$(5) \quad v/c_0 = M \sin(\omega\tau), \quad \omega\tau + M \cos(\omega\tau) - \sigma \sin(\omega\tau) = \omega \left(t - \frac{x - a_0}{c_0} \right).$$

Здесь $\sigma = \varepsilon k M (x - a)$ — параметр, связанный с нелинейностью свойств среды.

Фубини пренебрег членом $M \cos(\omega, \tau)$ в уравнении (5) и получил приближенное решение задачи. Получим точное решение уравнений (5) с сохранением этого члена. Для этого введем новые переменные и параметры

$$(6) \quad \alpha = \sqrt{\sigma^2 + M^2}, \quad \theta = \text{arctg}(M/\sigma), \quad \varphi = \omega\tau - \theta, \\ \beta = \omega \left(t - \frac{x - a}{c_0} \right) - \theta.$$

В результате уравнения (5) преобразуются к виду

$$(7) \quad v/c_0 = M \sin(\varphi + \theta), \quad \varphi - \alpha \sin \varphi = \beta.$$

Здесь второе уравнение является известным трансцендентным уравнением Бесселя — Лагранжа и имеет решение [4]

$$(8) \quad \sin \varphi = \frac{2}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} J_n(n\alpha) \frac{\sin(n\beta)}{n}, \quad \cos \varphi = -\frac{\alpha}{2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n'(n\alpha) \frac{\cos(n\beta)}{n},$$

где J_n и J_n' — бesselова функция и ее производная. С помощью (7), (8) находим окончательный вид решения

$$(9) \quad \frac{v(x, t)}{c_0} = -\frac{M^2}{2} + \frac{2M^2}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n'(n\alpha)}{n} \cos(n\beta) + \\ + \frac{2\sigma M}{\alpha^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n(n\alpha)}{n} \sin(n\beta).$$

Последний ряд здесь дает решение Фубини при условиях $\sigma \gg M$, $x \gg a$ (см., например, работу [2]):

$$(10) \quad \frac{v_F}{c_0} = 2M \sum_{n=1}^{\infty} J_n(n\sigma) \frac{\sin[n\omega(t-x/c_0)]}{n\sigma}.$$

Ряды в формуле (9) сходятся при $\alpha \leq 1$, однако производные скорости $v(x, t)$ по x и t при $\alpha = 1$ выражаются расходящимися рядами [4]. Из условия $\alpha = 1$ находим координату x_p образования разрыва

$$(11) \quad x_p = a + \lambda \sqrt{1 - M^2} (\gamma + 1) \pi M,$$

$$\lambda = c_0 / 2\pi\omega.$$

Обсудим физический смысл решения (9). При условии $\sigma \ll M$ (9) переходит в точное решение линейного уравнения (1) с $\varepsilon = 0$ и с полным граничным условием (2) при $a = a_0(1 - \cos \omega t)$

$$(12) \quad \frac{v}{c_0} = -\frac{M^2}{2} + 2M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n'(nM)}{n} \cos n \left[\omega \left(t - \frac{x - a_0}{c_0} \right) - \frac{\pi}{2} \right].$$

Это означает, что возникновение гармоник основной частоты ω , а также нулевой гармоники, определяющей возвратное течение к поршню $v_0 = -c_0 M^2 / 2$, происходит в области, примыкающей к поверхности поршня, вследствие учета движения этой поверхности в граничном условии (2).

Заметим, что задача о решении уравнения (1) при $\varepsilon = 0$ с граничным условием (2) является по существу параметрической. Действительно, если ввести новую независимую переменную $y = x - a(t)$, то соотношения (1) и (2) дают линейное параметрическое уравнение с условием на неподвижной границе

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \left(c_0 - \frac{da}{dt} \right) \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad v(y, t) |_{y=0} = \frac{da}{dt}.$$

В пределе $M \rightarrow 0$ в формуле (12) остается только первая гармоника

$$(13) \quad v_1(x, t) = a_0 \omega \sin \omega \left(t - \frac{x - a_0}{c_0} \right).$$

Именно это решение, а не решение (12) принято считать линейным, так как амплитуды обертонов в (12) нелинейно зависят от акустического числа Маха $v_n \sim cM^n$. По мере удаления волн от поршня становится существенным кумулятивный эффект слабой нелинейности свойств среды. С ростом параметра $\sigma \sim x$ возрастает роль второго ряда в формуле (9), а при $\sigma \gg M$ его члены значительно превосходят соответствующие гармоники первого ряда, обусловленные только параметрическим граничным условием.

Найдем средние значения скорости, ее квадрата и куба за период $T = 2\pi/\omega$. Для этого воспользуемся суммами, которые вычисляются стандартным способом [4]

$$(14) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n'^2(nx)}{n^2} = \frac{2-x^2}{8}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n^2(nx)}{n^2} = \frac{x^2}{4}, \quad x \leq 1.$$

С помощью сумм (14) из выражения (9) находим

$$(15) \quad \frac{\langle v \rangle}{c_0} = -\frac{M^2}{2}; \quad \frac{\langle v^2 \rangle}{c_0^2} = \frac{M^2}{2}; \quad \frac{\langle v^3 \rangle}{c_0^3} = -\frac{3M^4}{4} \left(1 - \frac{M^2}{3} \right).$$

В простой волне известна связь давления p , плотности ρ и температуры T со скоростью v [3]. Используя эти связи и соотношения (15), получим

$$(16) \quad \frac{\langle p - p_0 \rangle}{p_0} = \frac{\gamma(\gamma - 3)M^2}{8}; \quad \frac{\langle \rho - \rho_0 \rangle}{\rho_0} = -\frac{(\gamma + 1)M^2}{8};$$

$$\frac{\langle T - T_0 \rangle}{T_0} = \frac{(5 - \gamma)(1 - \gamma)}{8} M^2.$$

Выражения (16) совпадают с результатами, полученными путем усреднения по времени возмущений p и ρ в простой волне для эйлеровых переменных [5].

Заметим, что решение Бесселя – Фубини (15) не содержит нулевой гармоники и не дает правильных значений величин (15), (16). Интенсивность излучения звука поршнем $\langle I \rangle$ и средний поток массы $\langle j \rangle$ также получаются с помощью выражений (15), (16)

$$(17) \quad I = \left\langle v \left(\frac{\rho v^2}{2} + \frac{\gamma p}{\gamma - 1} \right) \right\rangle = \frac{\rho_0 c^3}{2} M^2, \quad \langle \rho v \rangle = 0,$$

Рассмотрим динамику шарообразной твердой частицы радиуса R , взвешенной в газе (аэрозоль) и помещенной близ осциллирующего поршня на расстоянии L . Будем считать $a_0 < L < x_p$ (11), $R < \lambda$ и число Рейнольдса $Re = (\rho_0 \langle u \rangle R \eta^{-1}) \ll 1$, η – вязкость, u – скорость частицы, усредненная за период $T = 2\pi/\omega$. Эта скорость определяется действием на частицу стоксовской силы вязкости и силы радиационного давления [1]. Усредненное уравнение движения частицы с массой m имеет вид

$$(18) \quad m \frac{du}{dt} = -6\pi\eta R(u - \langle v \rangle) + 4\pi\rho_0 R^2 \left(\frac{\omega R}{c} \right)^4 \langle v^2 \rangle.$$

При начальном условии $u=0$ при $t_0 = (L/c_0)$, когда в момент прихода волны частица неподвижна, решением этого уравнения является

$$(19) \quad u(t) = (\langle v \rangle + A \langle v^2 \rangle) \left[1 - \exp\left(-\frac{t-t_0}{t_1}\right) \right],$$

$$A = \frac{2\rho_0\omega^4 R^5}{3c_0^4\eta}, \quad \langle v \rangle = -c_0 \frac{M^2}{2}, \quad \langle v^2 \rangle = c_0^2 \frac{M^2}{2}, \quad t_1 = \frac{m}{6\pi\eta R}.$$

Следовательно, при условии

$$(20) \quad \frac{2\rho_0\omega^4 R^5}{3c_0^3\eta} > 1$$

действие радиационного давления преобладает над влиянием вязкости и частица двигается от поршня при $t > t_0$. При обратном знаке неравенства в формуле (20) частица будет двигаться к поршню со скоростью, пропорциональной $|\langle v \rangle|$. Таким образом, наблюдая за движением частиц с различными размерами R , можно измерять средние величины $\langle v \rangle$ и $\langle v^2 \rangle$.

Благодарю К. А. Наугольных, Л. А. Островского и И. А. Урусовского за полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. К. Зарембо, В. А. Красильников. Введение в нелинейную акустику. М. «Наука», 1966.
2. D. J. Blackstock. Propagation Plane Sound Waves of Finite Amplitude in Nondissipative Fluids. J. Acoust. Soc. Amer., 1962, 34, 1, 9–29.
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Механика сплошных сред, М.—Л., Гостехиздат, 1953.
4. Г. Н. Варсон. Теория бесселевых функций, т. I, М., Изд-во иностр. лит., 1949.
5. Н. Н. Андреев. О некоторых величинах второго порядка в акустике. Акуст. ж., 1955, 1, 1, 3–12.

Научно-исследовательский
радиофизический институт,
Горький

Поступила
3 июля 1972 г.
После переработки
3 сентября 1973 г.