симального значения $S_{\text{вх}}(f)$ до точки половинной мощности), результаты вычислений показывают, что пропускная способность преобразователя нулевого порядка в диапазоне частот 10—100 *гц* в 1,2 раза превышает пропускную способность преобразователя первого порядка, а в диапазоне частот 20—100 *гц*, наоборот, меньше ее в 1,05 раза, что обусловлено, в частности, увеличением чувствительности преобразователя первого порядка с ростом частоты.

ЛИТЕРАТУРА

1. *К. Е. Шеннон*. Математическая теория связи. В сб. «Работы по теории информации и кибернетике». М., Изд-во иностр. лит., 1963.

Поступила
15 мая 1973 г.

УДК 621.391.1:519.27

ВЛИЯНИЕ РАЗМЕРОВ ПРИЕМНИКА НА СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРА КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ

Л. А. Решетов

Процесс преобразования случайного поля во временной сигнал сопровождается осреднением флуктуационных составляющих поля на чувствительной поверхности приемного устройства. Влиянию размеров приемника на искажения спектра и корреляционной функции посвящен ряд статей [1—3], где в основном исследовались пространственно-частотные характеристики приемника случайного поля при различных моделях распределения чувствительности.

В ряде практических задач акустики корреляционная функция случайного поля может быть определена единственным параметром. Статистические ошибки оценки параметра корреляционной функции на выходе приемника случайного поля являются предметом настоящей работы.

Пусть случайное поле $\xi(x, y, z, t)$ является гауссовским, однородным и изотропным полем с нулевым средним и корреляционной функцией

$$K_\xi(\rho)=DR_\xi(\rho), \qquad \rho=[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)+(z_2-z_1)^2]^{1/2}. \tag{1}$$

Предположим, что для регистрации используется щелевой приемник, т. е. приемная поверхность имеет вид прямоугольника длиной H и шириной B, причем B всегда меньше радиуса корреляции ρ_k, а чувствительность приемника a одинакова в любой точке поверхности $B\times H$. Пусть случайное поле переносится вдоль большой стороны прямоугольника H со скоростью $\overline{V}$. Если для упрощения предположить, что скорость переноса велика, то можно воспользоваться гипотезой о «замороженности» поля и не рассматривать временные изменения поля за время регистрации.

Если совместить ось OX с вектором скорости переноса $\overline{V}$, то операция осреднения случайного поля приемной поверхностью может быть представлена формулой

$$\eta(x, y)=\int_x^{x+H}\int_y^{Y+B}\xi(x, y)\,dx\,dy. \tag{2}$$

Корреляционная функция случайной величины η будет

$$K_\eta(x_1, x_2, y_1, y_2)=\langle\eta(x_1, y_1)\eta(x_2, y_2)\rangle= \tag{3}$$

$$=\int_{x_1}^{x_1+H}\int_{x_2}^{x_2+H}\int_{y_1}^{y_1+B}\int_{y_1}^{y_2+B}K_\xi(x', x'', y_1, y_1)\,dx'\,dx''\,dy'\,dy'',$$

$$x_2=x_1+\rho, \qquad B\ll\rho_K.$$

Так как случайное поле однородно и изотропно, то корреляционная функция $K_\xi(x, x'', y_1, y_1)$ не зависит от абсолютного значения координат x', x'', а является функцией их разности. Полагая $x_1=0$ и $y_1=0$, преобразуем формулу (3) к виду

$$K_\eta(\rho)=\int_0^H\int_0^H\int_0^B\int_0^B K_\xi(\rho+x''-x', 0)\,dx'\,dx''\,dy'\,dy''= \tag{4}$$

$$=B^2\int_0^H\int_0^H K_\xi(\rho+x''-x')\,dx'\,dx''.$$

Вычисляя преобразование Фурье от обеих частей выражения (4), получим

$$S_\eta(\varkappa)=B^2H^2\left[\frac{\sin\dfrac{\varkappa H}{2}}{\dfrac{\varkappa H}{2}}\right]^2 S_\xi(\varkappa). \tag{5}$$

В формуле (5) множитель

$$\left[\frac{\sin u}{u}\right]^2 \tag{6}$$

описывает осредняющее действие приемной поверхности, выражающееся в подавлении высокочастотных составляющих случайного поля. Спектральная плотность мощности электрического сигнала в соответствии с формулой (5) имеет вид

$$S_\eta(\omega)=(aBH)^2\left[\frac{\sin\omega T_u/2}{\dfrac{\omega T_u}{2}}\right]^2 S_\xi(\omega), \tag{7}$$

где $\omega=\varkappa V$, $S(\varkappa)=V^{-1}S(\varkappa V)$, $T_u=V^{-1}H$.

Пусть пространственная корреляционная функция случайного поля $K_\xi(\rho,\lambda)$ может быть определена одним параметром масштаба λ, а соответственная временная корреляционная функция $K_\xi(\tau,\alpha)$ – параметром $\alpha=\lambda V$. Оценка максимального правдоподобия параметра временной корреляционной функции случайного сигнала, наблюдаемого на фоне аппаратурного шума, и ее статистические данные рассмотрены в работе [4]. Дисперсия оценки при достаточно большом времени анализа $T\gg\tau_K$ и при условии энергетического превышения сигнала над шумом может быть определена по формуле

$$\sigma_\alpha^2=2(J)^{-1}, \tag{8}$$

$$J=\frac{T}{2\pi}\int_0^\infty\left[\frac{dS_\eta(\omega,\alpha)}{d\alpha}\right]^2_{\alpha*}[S_\eta(\omega,\alpha_*)+S_n(\omega)]^{-2}\,d\omega, \tag{9}$$

где $S_n(\omega)$ – спектральная плотность мощности помехи. Знак (*) определяет расчетное значение параметра корреляционной функции.

Дисперсия оценки зависит от вида корреляционной функции сигнала и помехи и в каждом конкретном случае может быть вычислена по формуле (8). Но при больших размерах приемной поверхности ($\lambda H\gg1$) и помехе типа белого шума со спектральной плотностью мощности $N_0/2$ можно получить обобщенные соотношения для случайных процессов с монотонно убывающей спектральной плотностью, если воспользоваться соображениями, аналогичными применяемым при приближенном вычислении интегралов по методу седловых точек [5]. Действительно, если H велико и $2S_\eta(0,\alpha)/N_0\ll1$, то благодаря множителю (6) величина интеграла в формуле (8) определяется областью нулевых частот. Тогда приближенно можно считать, что

$$S_\eta(\omega,\alpha)\cong S_\eta(0,\alpha),\qquad \lambda H\gg1. \tag{10}$$

Подставляя выражения (7) и (10) в формулу (8) и вычисляя интеграл, получим

$$\sigma_\alpha^2=\frac{3}{4}\frac{N_0^2}{LH^3(aB)^4}\left[\frac{dS_\xi(0,\alpha)}{d\alpha}\right]^{-2}_{\alpha*}\quad\text{при}\quad \lambda H\gg1,\quad \frac{2S_\eta(0,\alpha)}{N_0}\ll1 \tag{11}$$

где $L=TV$ – пространственная длина реализации. Таким образом, для рассматриваемого класса случайных процессов дисперсия оценки параметра α убывает с увеличением размеров приемника быстрее, чем увеличивается отношение сигнал/шум.

Применим полученное выражение (11) для расчета дисперсии оценки параметра масштаба пространственной корреляционной функции

$$K_\xi(\rho)=De^{-\lambda_*|\rho|}. \tag{12}$$

Соответственные пространственный и временной спектры

$$S_\xi(\varkappa,\lambda_*)=D\frac{2\lambda_*}{\varkappa^2+\lambda_*^2},\qquad S_\xi(\omega,\alpha_*)=a^2D\frac{2\alpha_*}{\omega^2+\alpha_*^2}. \tag{13}$$

Тогда из формулы (11) окончательно находим дисперсию оценок параметров α и λ при наблюдении реализации на фоне белого шума

$$\sigma_\alpha^2=\frac{3}{16}\frac{N_0^2\alpha_*^4}{LH^3(aB)^4D^2},\qquad \sigma_\lambda^2=\sigma_\alpha^2V^{-2}. \tag{14}$$

В соответствии с формулой (14) можно сделать вывод о том, что случайное поле с большими пространственными масштабами позволяет получить малые погрешности оценивания параметра корреляционной функции.

Необходимо сделать еще одно замечание об особенностях оценки максимального правдоподобия параметра корреляционной функции при больших отношениях сигнал/шум. Если $2S_\eta(0, \alpha)/N_0 \gg 1$, то, как правило, и $\sigma_\alpha^2 \to 0$ при любом T и H, т. е. при отсутствии шума оценка максимального правдоподобия параметра корреляционной функции может быть осуществлена с бесконечно высокой точностью при любом времени анализа и любых размерах приемника. Этот вывод является следствием сингулярности рассматриваемого случая [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. М. Лямшев, С. А. Салосина.* О влиянии размеров приемника на результаты измерения спектра пристеночных пульсаций давления в пограничном слое. Акуст. ж., 1966, *12*, 2, 261–263.
2. *P. H. White.* Effects of tranducers size and surface sensitivity on the measurement of boundary layer pressure. J. Acoust. Soc. America, 1967, *41*, 5, 1358–1363.
3. *В. С. Петровский.* Осреднение турбулентных пульсаций давления приемником звука со случайным распределением чувствительности. Акуст. ж., 1973, *19*, 3, 404–410.
4. *Г. С. Нахмансон.* О точности оценки параметра функции корреляции нормального случайного процесса при приеме на фоне белого шума. Радиотехника и электроника, 1971, *16*, 8, 1492–1494.
5. *Д. Е. Вакман.* Асимптотические методы в линейной радиотехнике. М., «Сов. радио», 1962.
6. *D. Slepian.* Some comments on the detection of Gaussian signals in Gaussian noise. IRE Trans., 1958, IT-4, 2, 65–68.

Северо-Западный заочный политехнический институт

Поступила
29 октября 1973 г.

УДК 534.222.1

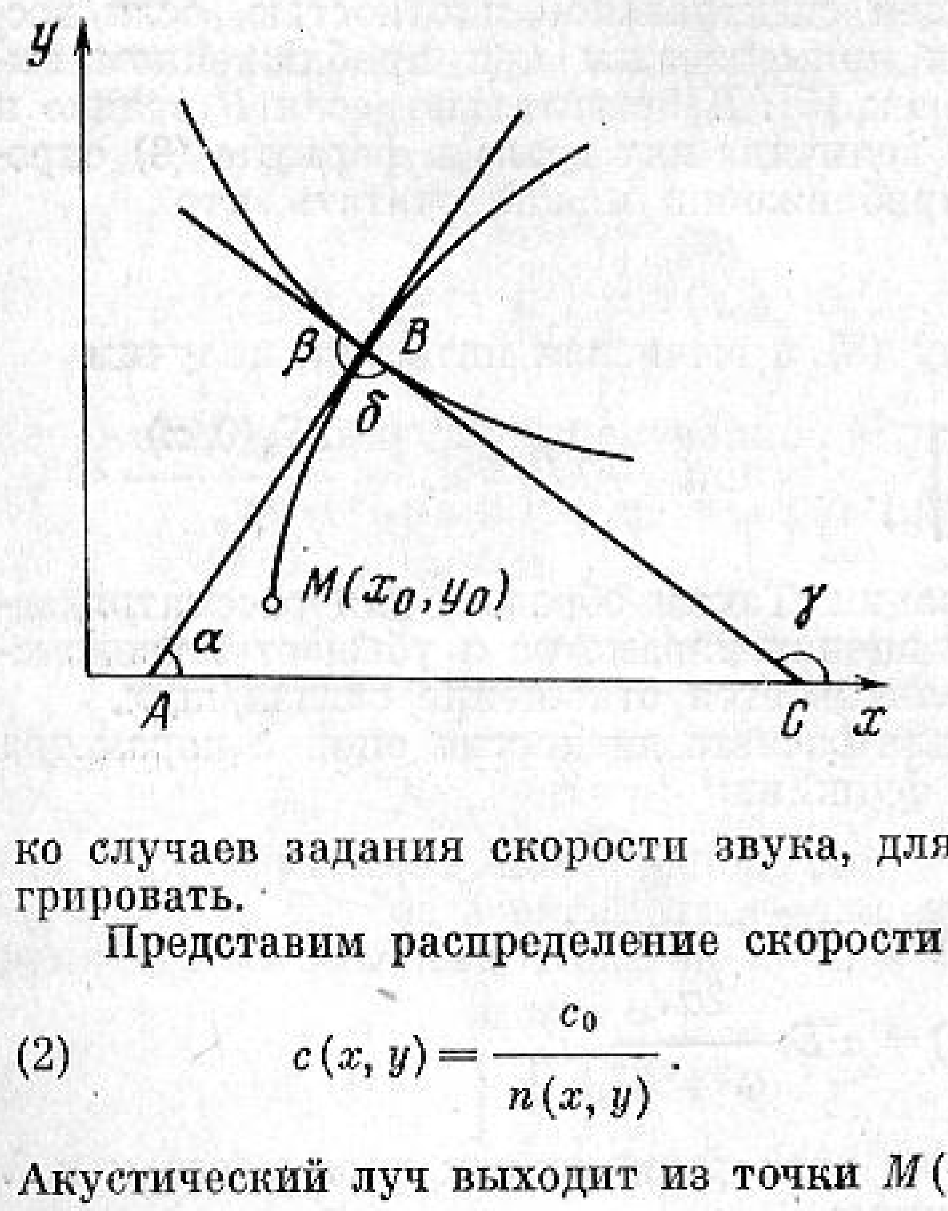
К ВОПРОСУ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ЗВУКА В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

В. И. Чупрынин

При изучении распространения звуковых волн наряду с волновыми методами широко используется метод лучевого приближения. Определение геометрии акустического луча в случае, когда скорость звука зависит от одной координаты, сводится к решению известного дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{n^2(y)}{\cos^2 \alpha_0} - 1}, \tag{1}$$

где $n(y) = c_0/c(y)$, c_0 и $c(y)$ — скорости звука в точках с координатами (x_0, y_0) и (x, y) соответственно, α_0 — угол между осью x и касательной к лучу в точке (x_0, y_0). Уравнение (1) интегрируется в зависимости от вида функции численно или аналитически.



Ниже получено дифференциальное уравнение луча для неоднородной среды, характеризуемой произвольно изменяющейся в плоскости x, y скоростью звука. Получить интеграл этого уравнения в общем виде не удается, поэтому выбрано несколько случаев задания скорости звука, для которых это уравнение возможно проинтегрировать.

Представим распределение скорости звука в плоскости x, y в виде

$$c(x, y) = \frac{c_0}{n(x, y)}. \tag{2}$$

Акустический луч выходит из точки $M(x_0, y_0)$ (фигура). В любой точке луча

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha, \tag{3}$$