АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XX 1974 Вып. 4

УДК 534.232

ФОРМИРОВАНИЕ ЗАДАННОГО ПОЛЯ СИСТЕМОЙ ИЗЛУЧАТЕЛЕЙ, РАСПОЛОЖЕННЫХ НА ОКРУЖНОСТИ

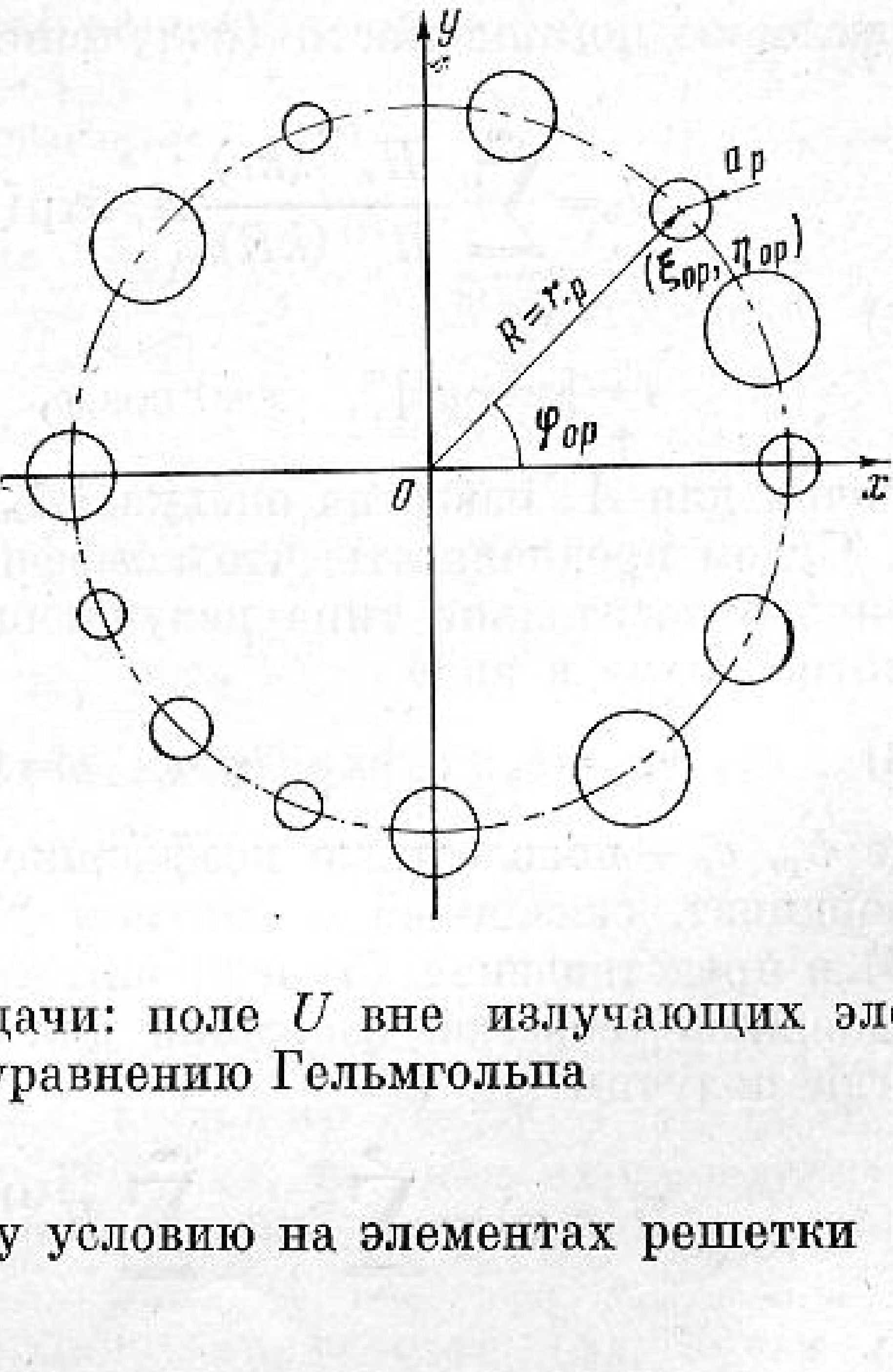
В. П. Иванов

Рассмотрена плоская задача о формировании поля заданного вида системой излучателей, центры которых расположены на окружности радиуса R. Амплитуды и фазы излучателей подобраны таким образом, чтобы вне круга радиуса R излученное поле совпадало с заданным, а внутри круга поле излучателей не превосходило по модулю малой величины.

Пусть в плоскости xoy расположена система излучателей, p-м элементом которой является круг L_p радиуса a_p с центром в точке ξ_{0p}, η_{0p}, $p=1,\ldots,P$. Предполагается, что элементы системы не пересекаются, т. е.

$$[(\xi_{0p}-\xi_{0q})^2+(\eta_{0p}-\eta_{0q})^2]^{1/2}>a_p+a_q,\quad q\neq p,\quad q=1,\ldots,P,$$

а область, ограниченная замкнутой кривой, на которой расположены центры излучающих элементов, представляет собой круг радиуса R с центром в начале координат, причем $\max\limits_p a_p<R$ (фигура). В качестве излучающих элементов этой системы будут использованы излучатели монопольного и дипольного типов (в излучателе монопольного типа плотность постоянна, в излучателе дипольного типа меняется по закону $\sim\exp(i\varphi)$).



Следует так задать амплитуды и фазы излучающих элементов, чтобы при $r\geqslant R^*=R+\max\limits_p a_p+h$, $h>0$, поле, излученное системой излучателей, совпадало с заданным полем U_0 с наперед заданной точностью, а при $r\leqslant R_*=R-\max\limits_p a_p-h_1$, $h_1>0$, поле системы излучателей не превосходило по модулю наперед заданной величины ε_1. Здесь r, φ — полярные координаты с полюсом в начале координат и полярной осью, совпадающей с осью x.

Математическая формулировка задачи: поле U вне излучающих элементов удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца

$$(\Delta+k^2)U(x,y)=0, \tag{1}$$

где $k=\omega/c$ — волновое число, краевому условию на элементах решетки

$$\left(\frac{\partial U}{\partial n}+ikg\,U\right)\bigg|_{L_p}=f_p,$$

$$\operatorname{Re} g\geqslant 0,\quad p=1,\ldots,P, \tag{2}$$

условию погашаемости Г. Д. Малюжинца

$$\sup_{(x,y)\in T} |U(x,y)| < \infty \quad \text{при } \operatorname{Im} k > 0, \tag{3}$$

T — область вне элементов решетки.

Требуется так задать функции f_p, чтобы поле U удовлетворяло условиям

$$\begin{aligned} &U(x,y) = U_0(x,y) + U_1(x,y), \\ &|U_1(x,y)| \leqslant \varepsilon \text{ при } r \geqslant R^*, \\ &|U(x,y)| \leqslant \varepsilon_1 \text{ при } r \leqslant R_*. \end{aligned} \tag{4}$$

Единственность решения задачи (1)—(3) доказана в работе [1].

Будем искать поле U в виде суммы

$$U = \sum_{p=1}^{P} \int_{L_p} \mu_p(\xi_p, \eta_p) \frac{i}{2} H_0^{(1)} \{k[(x-\xi_p)^2 + (y-\eta_p)^2]^{1/2}\} ds_p. \tag{5}$$

Здесь $\xi_p = \xi_p(s_p)$, $\eta_p = \eta_p(s_p)$ — уравнение контура L_p, $p=1,\ldots,P$, μ_p — неизвестные плотности. Подставляя формулу (5) в краевое условие (2), получим соотношение, связывающее неизвестные функции f_p и μ_p:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2i} \sum_{p=1}^{P} \int_{L_p} \mu_p(\xi_p, \eta_p) \left(\frac{\partial}{\partial n_1} + ikg \right) H_0^{(1)} \{k[(\xi_{1q} - \xi_p)^2 + \\ &+ (\eta_{1q} - \eta_p)^2]^{1/2}\} ds_p + \mu_q(\xi_{1q}, \eta_{1q}) = -f_q(\xi_{1q}, \eta_{1q}), \quad q = 1, \ldots, P, \end{aligned} \tag{6}$$

где $\partial/\partial n_1$ — производная по нормали к контуру L_q в точке $(\xi_{1q}, \eta_{1q}) \in L_q$. Соотношение (6) будет использовано далее для определения неизвестных функций f_q, плотности μ_q будут выбраны таким образом, чтобы выполнялись условия (4).

Любое поле, удовлетворяющее однородному уравнению Гельмгольца и условию погашаемости (излучения), можно записать в виде [2]:

$$\begin{aligned} &U_0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{H_n^{(1)}(kr)}{H_n^{(1)}(kR)} A_n \exp(-in\varphi), \quad r \geqslant R^*, \\ &r = [x^2 + y^2]^{1/2}, \quad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \end{aligned} \tag{7}$$

причем для A_n известна оценка $|A_n| \sim O(1/n^m)$ для любого m.

Будем предполагать, что коэффициенты A_n известны. Учитывая замечание относительно типа излучающих элементов системы, будем искать плотности μ_p в виде

$$\mu_p = b_p + c_p \exp(i\varphi_p), \quad p = 1, \ldots, P, \tag{8}$$

где b_p, c_p — неизвестные коэффициенты, φ_p — полярный угол в системе координат, связанный с центром p-ого излучателя. Подставим формулу (8) в представление (5) и проинтегрируем по всем контурам L_p, воспользовавшись теоремой сложения для цилиндрических функций при $r \geqslant R^*$; тогда получим

$$\begin{aligned} &U(r,\varphi) = \sum_{p=1}^{P} 2\pi a_p \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n^{(1)}(kr) \exp[in(\varphi_{0p} - \varphi)] \times \\ &\times \{b_p J_0(ka_p) J_n(kR) - c_p J_1(ka_p) J_{n+1}(kR) \exp(i\varphi_{0p})\}, \\ &R = r_p = [\xi_{0p}^2 + \eta_{0p}^2]^{1/2}, \quad \xi_{0p} = r_p \cos\varphi_{0p}, \quad \eta_{0p} = r_p \sin\varphi_{0p}. \end{aligned} \tag{9}$$

При $r \leqslant R_*$ поле U имеет вид

$$U(r,\varphi)=\sum_{p=1}^{P} 2\pi a_p \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(kr)\exp[in(\varphi_{0p}-\varphi)]\times \tag{10}$$

$$\times\{b_p J_0(ka_p) H_n^{(1)}(kR) - c_p J_1(ka_p) H_{n+1}^{(1)}(kR)\exp(i\varphi_{0p})\}.$$

Так как ряд для поля U_0 в формуле (7) сходится абсолютно и равномерно при $r > R^*$, то представим заданное поле U_0 в виде суммы

$$U_0=\sum_{n=-N}^{N}\frac{H_n^{(1)}(kr)}{H_n^{(1)}(kR)}A_n\exp(-in\varphi)+U_{01},\qquad |U_{01}|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

Потребуем, чтобы выполнялись равенства

$$\sum_{p=1}^{P} a_p\exp(in\varphi_{0p})\{b_p J_0(ka_p)J_n(kR)- \tag{11}$$

$$-c_p J_1(ka_p)J_{n+1}(kR)\exp[i\varphi_{0p}]\}=\frac{A_n}{2\pi H_n^{(1)}(kR)},$$

$$\sum_{p=1}^{P} a_p\exp(in\varphi_{0p})\{b_p J_0(ka_p)H_n^{(1)}(kR)-$$

$$-c_p J_1(ka_p)H_{n+1}^{(1)}(kR)\exp[i\varphi_{0p}]\}=0,\quad -N\leqslant n\leqslant N$$

Эти равенства означают, что при $r \geqslant R^*$ первые $2N+1$ гармоник поля U_0 и U_1 совпадают, при $r \leqslant R_*$ первые $2N+1$ гармоник, интерферируя, обращаются в нуль.

Перепишем равенства (11) в удобном виде

$$\sum_{p=1}^{P}\exp[in\varphi_{0p}]\,b_p^*=\frac{ikR}{4}\cdot\frac{H_{n+1}(kR)}{H_n(kR)}A_n,\quad -N\leqslant n\leqslant N, \tag{12}$$

$$\sum_{p=1}^{P}\exp[in\varphi_{0p}]\,c_p^*=\frac{ikR}{4}A_n,\quad -N\leqslant n\leqslant N, \tag{13}$$

$$b_p^*=a_pJ_0(ka_p)\,b_p,\quad c_p^*=a_pJ_1(ka_p)\exp(i\varphi_{0p})\,c_p,$$

$$0<|ka_p|\leqslant 2.$$

Мы получили независимые системы алгебраических уравнений (12) и (13) относительно неизвестных b_p^*, c_p^*. Положим $P=2N+1$, тогда системы (12) и (13) имеют единственное решение, так как их определитель есть определитель Вандермонда, который отличен от нуля при $\varphi_{0l}\neq\varphi_{0s}$, $1\leqslant l,\ s\leqslant 2N+1$.

При оценке расстояний h и h_1, входящих в условие (4), будем считать N столь большим, что можно пользоваться асимптотикой функций Бесселя для большого индекса. Воспользуемся разложениями (7) и (9) и, учитывая соотношение (11), рассмотрим при $r \geqslant R^*$ модуль разности $|U-U_0|$

$$|U-U_0|=|U_1|=\Bigg|\sum_{n=N+1}^{\infty}\sum_{p=1}^{2N+1}\{4\pi b_p^*\cos[n(\varphi_{0p}-\varphi)]H_n^{(1)}(kr)J_n\times$$

$$\times(kR)-2\pi c_p^* H_n^{(1)}(kr)[J_{n+1}(kR)\exp[in(\varphi_{0p}-\varphi)]-J_{n-1}(kR)\times$$

$$\times\exp[-in(\varphi_{0p}-\varphi)]\}+U_{01}\Bigg|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{12ed(2N+1)}{R^*-R}\left(\frac{R}{R^*}\right)^N=\varepsilon,$$

$$d=\max_p[|b_p^*|,|c_p^*|].$$

Отсюда определяем расстояние h

$$h=R\left\{\left[\frac{24de(2N+1)}{\varepsilon a_{p\,\max}}\right]^{1/N}-1\right\}-a_{p\,\max},\quad p=1,\ldots,2N+1.$$

Проводя аналогичные оценки для модуля поля U, определенного по формуле (10) при $r \leqslant R_*$, получим h_1:

$$h_1=R\left\{1-\left[\frac{\varepsilon_1 a_{p\,\max}}{12de(2N+1)}\right]^{1/N}\right\}-a_{p\,\max},\quad p=1,\ldots,2N+1.$$

Если после вычислений оказалось, что $h, h_1 \leqslant 0$, то следует уменьшить $a_{p\,\max}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. Д. Малюжинец*. Математическая формулировка задачи о вынужденных гармонических колебаниях в произвольной области. Докл. АН СССР, 1951, *78*, 3, 439–442.
2. *S. N. Karp*. A convergent «farfield» expansion for two-dimensional radiation functions. Communs Pure and Appl. Math., 1961, *14*, 3, 427–439.

Акустический институт
Академии наук СССР

Поступила
15 июля 1972 г