АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XX 1974 Вып. 4

УДК 534.232

ФОРМИРОВАНИЕ ЗАДАННОГО ПОЛЯ СИСТЕМОЙ ИЗЛУЧАТЕЛЕЙ, РАСПОЛОЖЕННЫХ НА ОКРУЖНОСТИ

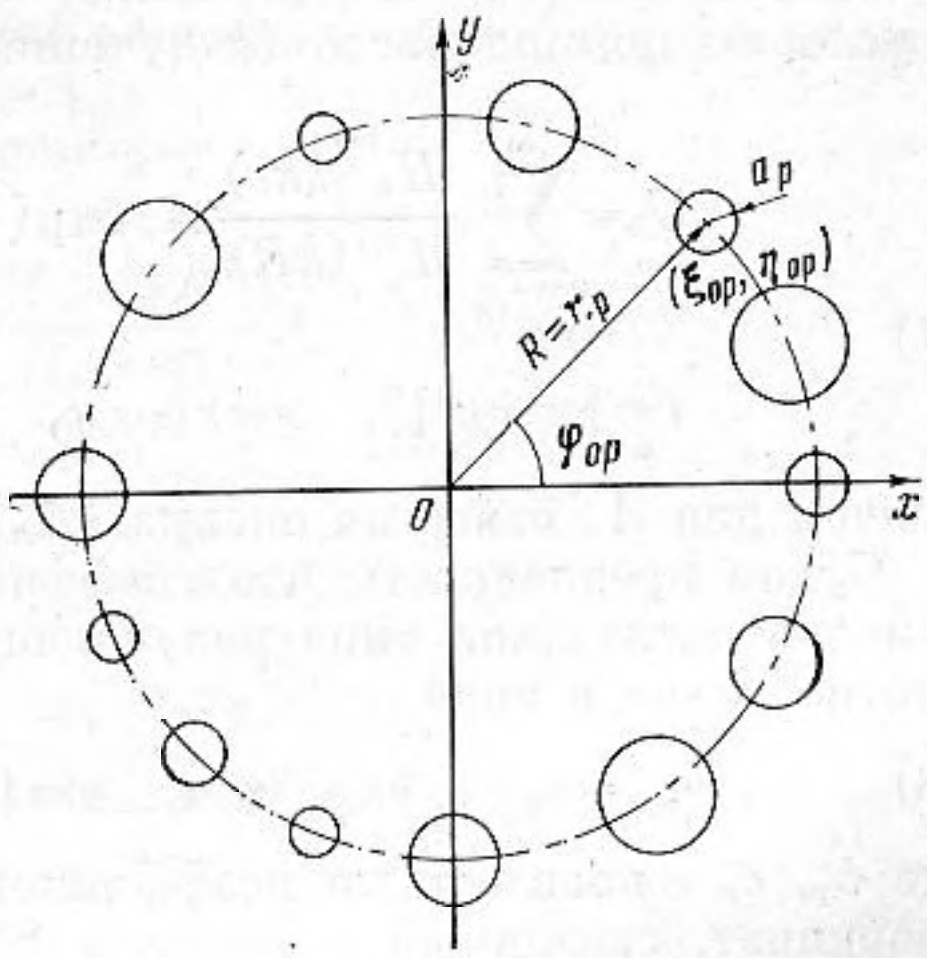
В. П. Иванов

Рассмотрена плоская задача о формировании поля заданного вида системой излучателей, центры которых расположены на окружности радиуса R. Амплитуды и фазы излучателей подобраны таким образом, чтобы вне круга радиуса R излученное поле совпадало с заданным, а внутри круга поле излучателей не превосходило по модулю малой величины.

Пусть в плоскости xoy расположена система излучателей, p-м элементом которой является круг L_p радиуса a_p с центром в точке ξ_{0p}, η_{0p}, $p=1, \ldots, P$. Предполагается, что элементы системы не пересекаются, т. е.

$$[(\xi_{0p}-\xi_{0q})^2+(\eta_{0p}-\eta_{0q})^2]^{1/2}>a_p+a_q, \quad q\neq p, \quad q=1, \ldots, P,$$

а область, ограниченная замкнутой кривой, на которой расположены центры излучающих элементов, представляет собой круг радиуса R с центром в начале координат, причем $\max\limits_p a_p<R$ (фигура). В качестве излучающих элементов этой системы будут использованы излучатели монопольного и дипольного типов (в излучателе монопольного типа плотность постоянна, в излучателе дипольного типа меняется по закону $\sim\exp(i\varphi)$).



Следует так задать амплитуды и фазы излучающих элементов, чтобы при $r\geqslant R^*=R+\max\limits_p a_p+h$, $h>0$, поле, излученное системой излучателей, совпадало с заданным полем U_0 с наперед заданной точностью, а при $r\leqslant R_*=R-\max\limits_p a_p-h_1$, $h_1>0$, поле системы излучателей не превосходило по модулю наперед заданной величины ε_1. Здесь r, φ — полярные координаты с полюсом в начале координат и полярной осью, совпадающей с осью x.

Математическая формулировка задачи: поле U вне излучающих элементов удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца

$$(1) \qquad (\Delta+k^2)U(x, y)=0,$$

где $k=\omega/c$ — волновое число, краевому условию на элементах решетки

$$\left(\frac{\partial U}{\partial n}+ikgU\right)\Big|_{L_p}=f_p,$$

$$(2) \qquad \operatorname{Re} g\geqslant 0, \quad p=1, \ldots, P,$$

условию погашаемости Г. Д. Малюжинца

$$\sup_{(x,y)\in T} |U(x,y)|<\infty \quad \text{при } \operatorname{Im} k>0, \tag{3}$$

T — область вне элементов решетки.

Требуется так задать функции f_p, чтобы поле U удовлетворяло условиям

$$\begin{aligned} &U(x,y)=U_0(x,y)+U_1(x,y),\\ &|U_1(x,y)|\leqslant\varepsilon \text{ при } r\geqslant R^*,\\ &|U(x,y)|\leqslant\varepsilon_1 \text{ при } r\leqslant R_*. \end{aligned} \tag{4}$$

Единственность решения задачи (1)—(3) доказана в работе [1].

Будем искать поле U в виде суммы

$$U=\sum_{p=1}^{P}\int_{L_p}\mu_p(\xi_p,\eta_p)\frac{i}{2}H_0^{(1)}\{k[(x-\xi_p)^2+(y-\eta_p)^2]^{1/2}\}ds_p. \tag{5}$$

Здесь $\xi_p=\xi_p(s_p)$, $\eta_p=\eta_p(s_p)$ — уравнение контура L_p, $p=1,\ldots,P$, μ_p — неизвестные плотности. Подставляя формулу (5) в краевое условие (2), получим соотношение, связывающее неизвестные функции f_p и μ_p:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2i}\sum_{p=1}^{P}\int_{L_p}\mu_p(\xi_p,\eta_p)\left(\frac{\partial}{\partial n_1}+ikg\right)H_0^{(1)}\{k[(\xi_{1q}-\xi_p)^2+\\ &+(\eta_{1q}-\eta_p)^2]^{1/2}\}ds_p+\mu_q(\xi_{1q},\eta_{1q})=-f_q(\xi_{1q},\eta_{1q}),\quad q=1,\ldots,P, \end{aligned} \tag{6}$$

где $\partial/\partial n_1$ — производная по нормали к контуру L_q в точке $(\xi_{1q},\eta_{1q})\in L_q$. Соотношение (6) будет использовано далее для определения неизвестных функций f_q, плотности μ_q будут выбраны таким образом, чтобы выполнялись условия (4).

Любое поле, удовлетворяющее однородному уравнению Гельмгольца и условию погашаемости (излучения), можно записать в виде [2]:

$$\begin{aligned} &U_0=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{H_n^{(1)}(kr)}{H_n^{(1)}(kR)}A_n\exp(-in\varphi),\quad r\geqslant R^*,\\ &r=[x^2+y^2]^{1/2},\quad x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi, \end{aligned} \tag{7}$$

причем для A_n известна оценка $|A_n|\sim O(1/n^m)$ для любого m.

Будем предполагать, что коэффициенты A_n известны. Учитывая замечание относительно типа излучающих элементов системы, будем искать плотности μ_p в виде

$$\mu_p=b_p+c_p\exp(i\varphi_p),\quad p=1,\ldots,P, \tag{8}$$

где b_p, c_p — неизвестные коэффициенты, φ_p — полярный угол в системе координат, связанный с центром p-ого излучателя. Подставим формулу (8) в представление (5) и проинтегрируем по всем контурам L_p, воспользовавшись теоремой сложения для цилиндрических функций при $r\geqslant R^*$; тогда получим

$$\begin{aligned} &U(r,\varphi)=\sum_{p=1}^{P}2\pi a_p\sum_{n=-\infty}^{\infty}H_n^{(1)}(kr)\exp[in(\varphi_{0p}-\varphi)]\times\\ &\times\{b_pJ_0(ka_p)J_n(kR)-c_pJ_1(ka_p)J_{n+1}(kR)\exp(i\varphi_{0p})\},\\ &R=r_p=[\xi_{0p}^2+\eta_{0p}^2]^{1/2},\quad \xi_{0p}=r_p\cos\varphi_{0p},\quad \eta_{0p}=r_p\sin\varphi_{0p}. \end{aligned} \tag{9}$$

При $r \leqslant R_*$ поле U имеет вид

$$U(r,\varphi)=\sum_{p=1}^{P} 2\pi a_p \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(kr)\exp[in(\varphi_{0p}-\varphi)]\times \tag{10}$$

$$\times\{b_p J_0(ka_p)H_n^{(1)}(kR)-c_p J_1(ka_p)H_{n+1}^{(1)}(kR)\exp(i\varphi_{0p})\}.$$

Так как ряд для поля U_0 в формуле (7) сходится абсолютно и равномерно при $r>R^*$, то представим заданное поле U_0 в виде суммы

$$U_0=\sum_{n=-N}^{N}\frac{H_n^{(1)}(kr)}{H_n^{(1)}(kR)}A_n\exp(-in\varphi)+U_{01}, \qquad |U_{01}|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

Потребуем, чтобы выполнялись равенства

$$\sum_{p=1}^{P} a_p\exp(in\varphi_{0p})\{b_p J_0(ka_p)J_n(kR)- \tag{11}$$

$$-c_p J_1(ka_p)J_{n+1}(kR)\exp[i\varphi_{0p}]\}=\frac{A_n}{2\pi H_n^{(1)}(kR)},$$

$$\sum_{p=1}^{P} a_p\exp(in\varphi_{0p})\{b_p J_0(ka_p)H_n^{(1)}(kR)-$$

$$-c_p J_1(ka_p)H_{n+1}^{(1)}(kR)\exp[i\varphi_{0p}]\}=0, \quad -N\leqslant n\leqslant N$$

Эти равенства означают, что при $r\geqslant R^*$ первые $2N+1$ гармоник поля U_0 и U_1 совпадают, при $r\leqslant R_*$ первые $2N+1$ гармоник, интерферируя, обращаются в нуль.

Перепишем равенства (11) в удобном виде

$$\sum_{p=1}^{P}\exp[in\varphi_{0p}]b_p^*=\frac{ikR}{4}\cdot\frac{H_{n+1}(kR)}{H_n(kR)}A_n, \quad -N\leqslant n\leqslant N, \tag{12}$$

$$\sum_{p=1}^{P}\exp[in\varphi_{0p}]c_p^*=\frac{ikR}{4}A_n, \quad -N\leqslant n\leqslant N, \tag{13}$$

$$b_p^*=a_p J_0(ka_p)b_p, \quad c_p^*=a_p J_1(ka_p)\exp(i\varphi_{0p})c_p,$$

$$0<|ka_p|\leqslant 2.$$

Мы получили независимые системы алгебраических уравнений (12) и (13) относительно неизвестных b_p^*, c_p^*. Положим $P=2N+1$, тогда системы (12) и (13) имеют единственное решение, так как их определитель есть определитель Вандермонда, который отличен от нуля при $\varphi_{0l}\neq\varphi_{0s}$, $1\leqslant l,\ s\leqslant 2N+1$.

При оценке расстояний h и h_1, входящих в условие (4), будем считать N столь большим, что можно пользоваться асимптотикой функций Бесселя для большого индекса. Воспользуемся разложениями (7) и (9)

и, учитывая соотношение (11), рассмотрим при $r \geqslant R^*$ модуль разности $|U-U_0|$

$$|U-U_0|=|U_1|=\Bigg| \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{p=1}^{2N+1} \{4\pi b_p^* \cos[n(\varphi_{0p}-\varphi)] H_n^{(1)}(kr) J_n \times$$

$$\times (kR) - 2\pi c_p^* H_n^{(1)}(kr) [J_{n+1}(kR) \exp[in(\varphi_{0p}-\varphi)] - J_{n-1}(kR) \times$$

$$\times \exp[-in(\varphi_{0p}-\varphi)]\} + U_{01} \Bigg| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{12ed(2N+1)}{R^*-R} \left(\frac{R}{R^*}\right)^N = \varepsilon,$$

$$d = \max_p [|b_p^*|, |c_p^*|].$$

Отсюда определяем расстояние h

$$h = R\left\{\left[\frac{24de(2N+1)}{\varepsilon a_{p\,\max}}\right]^{1/N} - 1\right\} - a_{p\,\max}, \quad p=1, \ldots, 2N+1.$$

Проводя аналогичные оценки для модуля поля U, определенного по формуле (10) при $r \leqslant R_*$, получим h_1:

$$h_1 = R\left\{1 - \left[\frac{\varepsilon_1 a_{p\,\max}}{12de(2N+1)}\right]^{1/N}\right\} - a_{p\,\max}, \quad p=1, \ldots, 2N+1.$$

Если после вычислений оказалось, что $h, h_1 \leqslant 0$, то следует уменьшить $a_{p\,\max}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. Д. Малюжинец.* Математическая формулировка задачи о вынужденных гармонических колебаниях в произвольной области. Докл. АН СССР, 1951, *78*, 3, 439–442.
2. *S. N. Karp.* A convergent «farfield» expansion for two-dimensional radiation functions. Communs Pure and Appl. Math., 1961, *14*, 3, 427–439.

Акустический институт
Академии наук СССР

Поступила
15 июля 1972 г