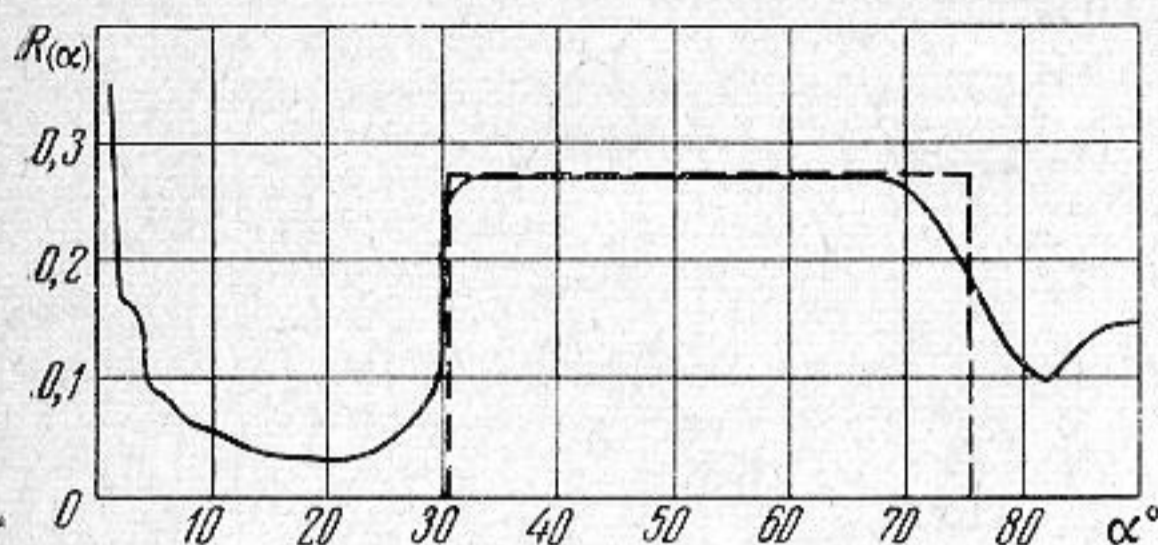
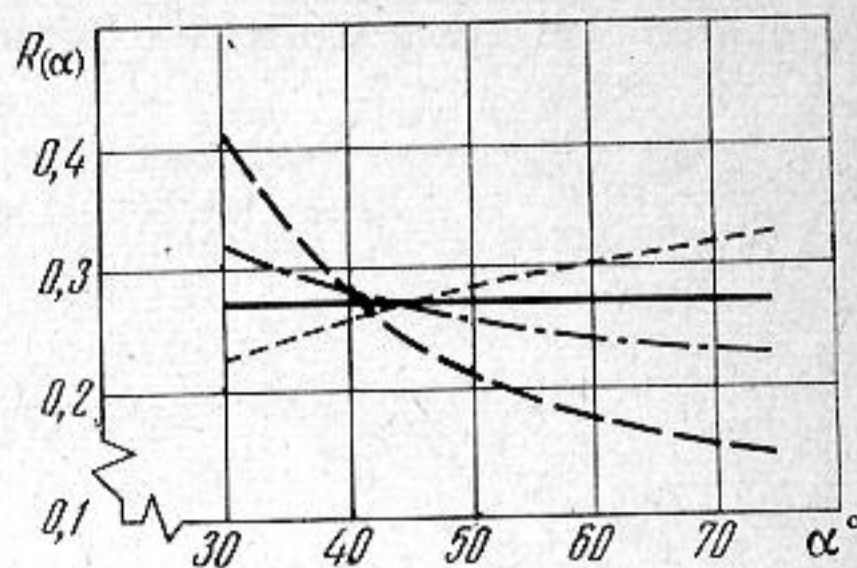


Как следует из фиг. 1, при равномерной спектральной плотности сигнала величина ореола увеличивается с уменьшением α . Связано это, по-видимому, с тем, что скорость движения дополнительного максимума характеристики направленности решетки вдоль оси α с изменением ω не постоянна и тем больше, чем больше α . Таким образом, в заданном интервале $\Delta\alpha$ излучается тем большая мощность, чем меньше значение α , при котором он расположен.

Формула (3) позволяет определить вид спектральной плотности $I(\omega)$, при котором величина ореола не зависит от α . Действительно, для того чтобы функция $R(\alpha)$



Фиг. 2



Фиг. 3

в пределах ореола была постоянной величиной, как видно из выражения (3), следует положить (для $m=1$)

$$I \left(\frac{\omega'}{\sin \alpha - \sin \alpha_0} \right) R_0^2 \left(\frac{\omega'}{\sin \alpha - \sin \alpha_0} \right) = \gamma (\sin \alpha - \sin \alpha_0),$$

где γ — некоторая константа. При $\alpha_0=0$ и $R_0(\alpha, \omega)=1$ мы имеем $I(\omega'/\sin \alpha) = \gamma \sin \alpha$, откуда, учитывая, что при $m=1$ и $\omega = \omega'/\sin \alpha$, получим $I(\omega) = \gamma \frac{\omega'}{\omega}$.

На фиг. 2 для $n=20$, $\omega_1=1,04\omega'$, $\omega_2=2\omega'$, $I(\omega) = \gamma \frac{\omega'}{\omega}$ представлены результаты

расчетов по формулам (1) и (3). Видно, что найденная выше спектральная плотность действительно приводит к постоянству величины ореола характеристики направленности антенны в определенной полосе частот.

На фиг. 3 приведены результаты расчета ореола характеристики направленности в случаях $I(\omega) = \gamma \frac{\omega'}{\omega}$ (сплошная линия), $I(\omega) = \gamma \frac{\omega^2}{\omega'^2}$ (штриховая линия), $I(\omega) = \gamma \frac{\omega'^2}{\omega^2}$

(пунктирная линия) и $I(\omega) = \gamma$ (штрихпунктирная линия). Число элементов антенны и ширина полосы те же, что и в предыдущем случае.

Как и следовало ожидать, для спектров, падающих с ростом частоты более круто, чем ω'/ω , уровень ореола увеличивается с ростом α , а для равномерного спектра или возрастающего с увеличением ω , наоборот, уровень ореола уменьшается с ростом α . Поскольку в случае приемной антенны спектральная плотность зависит от квадрата чувствительности элементов, выбирая ее соответствующим образом, можно добиваться желательной формы ореола, т. е. наиболее близкого к желательному ходу изменения величины ореола с изменением α . Дополнительные возможности в этом направлении появляются также при использовании элементов, обладающих известной направленностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Вандер Поль, Х. Бреммер. Операционное исчисление на основе двухстороннего преобразования Лапласа. М., Изд-во иностр. лит., 1952, 506.

Поступила
15 августа 1972 г.

УДК 534.213

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОГО ЦИЛИНДРА

Л. С. Шейба, С. А. Шляпочников

Среди немногочисленных задач о собственных колебаниях упругих тел, допускающих точные решения, может быть сформулирована задача для конечного цилиндра. Требуется найти собственные значения ω и собственные функции $U(r, z) \cos \omega t$ (рассматриваются осесимметричные колебания) определенного в конечном цилиндре

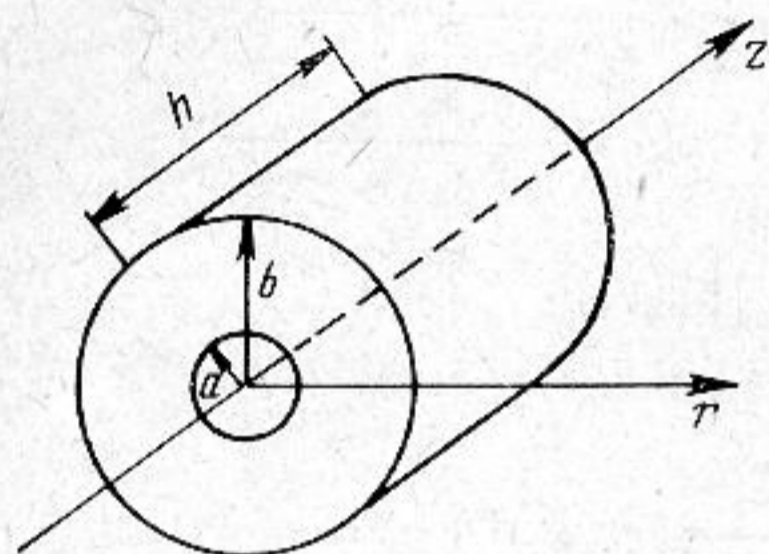
(фиг. 1) оператора теории упругости

$$(\lambda+2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{U} - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{U} = -\rho \omega^2 \mathbf{U}, \quad (1)$$

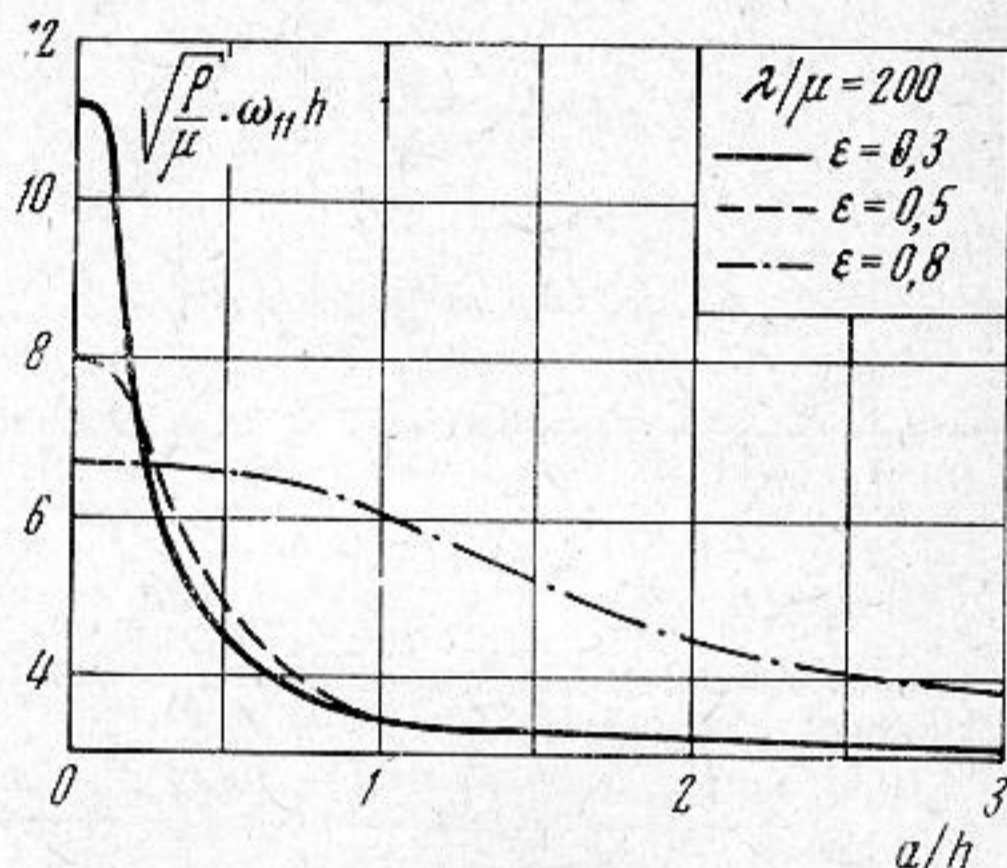
удовлетворяющие краевым условиям самосопряженного типа [1]

$$(\mathbf{U} \cdot \mathbf{t})|_{S_1+S_2+S_3} = 0. \quad (2)$$

В формулах (1), (2) ρ , μ , λ — плотность и постоянные Ламе (вещественные) материала, \mathbf{t} — вектор напряжений, действующих на боковые S_1 , S_2 (цилиндр может быть как полым, так и сплошным) и торцевые S_3 поверхности.



Фиг. 1



Фиг. 2

Покажем, что класс задач со специальными граничными условиями на S_3

$$u_r = t_z = 0, \quad z = 0, h \quad (3)$$

допускает решение в известных специальных функциях. Рассмотрим решение (1) в форме стоячей волны похгаммеровского типа

$$u_z = [C_1 J_0(\alpha r) + C_2 N_0(\alpha r) + C_3 J_0(\beta r) + C_4 N_0(\beta r)] \cos kz, \quad (4)$$

$$u_r = \left[C_1 \frac{k}{\alpha} J_1(\alpha r) + C_2 \frac{k}{\alpha} N_1(\alpha r) - C_3 \frac{\beta}{k} J_1(\beta r) - C_4 \frac{\beta}{k} N_1(\beta r) \right] \sin kz,$$

где $\alpha = \sqrt{k_l^2 - k^2}$, $\beta = \sqrt{k_t^2 - k^2}$,

$$k_l^2 = \frac{\rho}{\mu} \omega^2, \quad k_t^2 = \frac{\rho}{\lambda+2\mu} \omega^2,$$

C_1, C_2, C_3, C_4, k — подлежащие определению постоянные. Бегущие волны похгаммеровского типа подробно изучены, обширная библиография имеется, например, в работах [2, 3]. Выражение для компоненты тензора напряжений σ_{zz} будет [2]:

$$\sigma_{zz} = \lambda \theta + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad (5)$$

$$\theta = -\frac{\rho \omega^2}{\lambda+2\mu} [C_3 J_0(\beta r) + C_4 N_0(\beta r)] \sin kz. \quad (6)$$

Соотношения (4) — (6) показывают, что условия на торцевых поверхностях удовлетворяются, если положить $k = \frac{m\pi}{h}$, $m=0, 1, 2, 3, \dots$; граничные условия на S_1, S_2

приводят к дисперсионному уравнению типа Похгаммера — Кри, семейство решений которого мы обозначим через $k_n(\omega)$, $n=1, 2, 3, \dots$. Собственные частоты ω_{mn} форм колебаний цилиндра являются корнями уравнения

$$k_n(\omega_{mn}) = \frac{m\pi}{h}. \quad (7)$$

Выбор смещений в виде стоячих волн (4) приводит согласно формуле (7) к полной в пространстве, соответствующем классу задач (3), системе тригонометрических функций, определяющих зависимость форм колебаний от z : нечетным m соответствуют колебания симметричные относительно плоскости симметрии цилиндра $z = \frac{h}{2}$ формы, четным — антисимметричные.

Применим изложенный метод к задаче о собственных колебаниях полого цилиндра из резиноподобного материала ($\lambda \gg \mu$), на внутренней боковой поверхности которого отсутствуют напряжения, на внешней — нормальные перемещения и тангенциальные напряжения. Такого рода граничные условия представляют интерес, в связи с расчетом упругих сред с цилиндрическими каналами [4].

Условия (3) реализуются с помощью приклейки к торцам цилиндра тонких пластин из материала с модулем Юнга, значительно превышающим соответственный модуль резиноподобного материала. В данном случае дисперсионное уравнение, определяющее $k_n(\omega)$ таково [3]:

$$(1-\xi) \left\{ \xi \varepsilon x [J_1(x)N_0(\varepsilon x) - J_0(\varepsilon x)N_1(x)] [J_1(y)N_1(\varepsilon y) - J_1(\varepsilon y)N_1(y)] - \right. \\ \left. - \frac{\lambda}{2\mu} [J_1(x)N_1(\varepsilon x) - J_1(\varepsilon x)N_1(x)] [J_1(y)N_1(\varepsilon y) - J_1(\varepsilon y)N_1(y)] \right\} + \\ + \left(\frac{\lambda}{2\mu} - \xi \right)^2 \varepsilon y [J_1(y)N_0(\varepsilon y) - N_1(y)J_0(\varepsilon y)] [J_1(x)N_1(\varepsilon x) - J_1(\varepsilon x)N_1(x)] = 0, \quad (8)$$

где $\varepsilon = \frac{a}{b}$, $y = k_l b \sqrt{1-\xi}$, $x = k_l b \sqrt{\frac{\lambda}{\mu} - \xi}$, $\xi = \frac{k}{k_l}$.

Воспользовавшись численным решением уравнения (8), полученным в работе [3], нетрудно найти собственные частоты и формы колебаний. Зависимость собственной частоты ω_{11} нижней симметричной формы колебаний от геометрии цилиндра показана на фиг. 2.

При малых значениях $\frac{a}{h}$ ω_{11} определяется параметрами h и ε цилиндра и может быть найдена с помощью статического решения (8) [4, 5]. Для цилиндров с $\varepsilon < \varepsilon_0$ при достаточно больших значениях $x \frac{a}{h}$ ($\frac{a}{h} > \gamma(\varepsilon_0)$, в частности, $\gamma(0,3) \approx \gamma(0,5) \approx 2$, $\gamma(0,8) \approx 10$), ω_{11} зависит только от высоты h , что объясняется образованием рэлеевской волны на полости; условия на достаточно удаленной боковой поверхности при этом несущественны.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Г. Михлин. Проблема минимума квадратичного функционала. М., Гостехиздат, 1952.
2. D. C. Gassis. Three-Dimensional Investigation of the Propagation of Waves in Hollow Circular Cylinders, I. Analytical Foundation. JASA, 1959, 31, 5, 568—573.
3. А. Е. Вовк. Некоторые вопросы распространения упругих волн в твердых волноводах. Канд. дисс., М., АКИН, 1967.
4. В. В. Тюткин. Распространение упругих волн в среде с цилиндрическими каналами. Акуст. ж., 1956, 2, 3, 291—301.
5. В. Е. Глазнов. К вопросу об определении скорости распространения упругих волн в среде с цилиндрическими каналами. Акуст. ж., 1962, 8, 4, 468—469.

Поступила
13 марта 1973 г.