

УДК 534.26

ОБ ОСЛАБЛЕНИИ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ НА КРОМКАХ ДВУХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ДИСКОВ

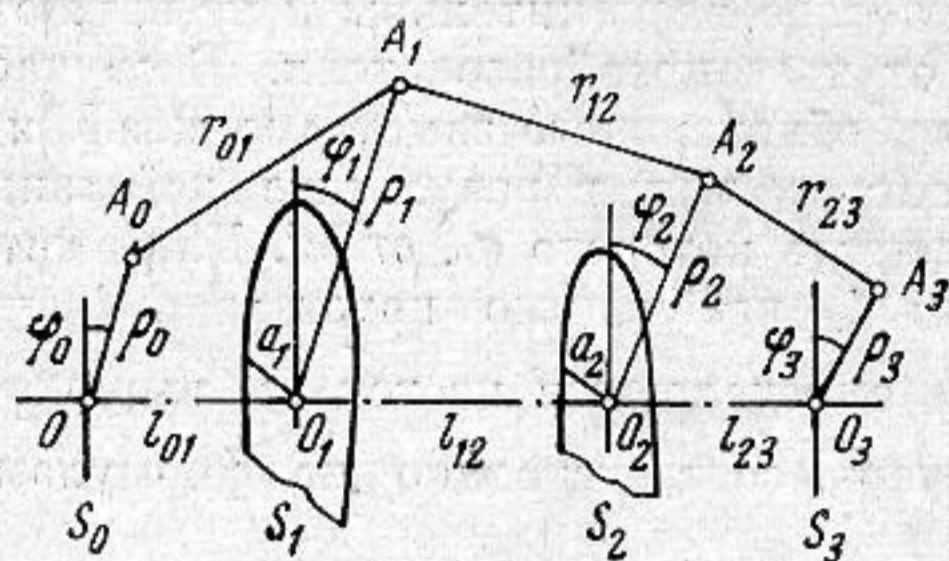
С. А. Комаков

В приближении Кирхгофа рассмотрена задача о падении сферической волны на два параллельных диска. Получено и проанализировано выражение для потенциала в области полутени; рассмотрено поле на оси дисков. Проведен расчет функции ослабления волны на одном и двух дисках. Результаты расчета сопоставлены с экспериментальными данными.

Задача дифракции на диске с идеальными граничными условиями относится к числу дифракционных классических задач, решаемых методом разделения переменных. Решение выражается в виде ряда, который быстро сходится лишь для малых волновых размеров диска ($ka \leq 1$, k — волновое число, a — радиус диска). Для диска с большими волновыми размерами ($ka \gg 1$) пользуются решением Кирхгофа. Решение представляет собой интеграл по плоскости, содержащей диск. Интеграл берется аналитически только для точек на оси диска. Поле на оси диска равно по амплитуде падающей волне и образует «светлое пятно». Расчет поля в произвольной точке также сложен, как и для задачи излучения поршня в экране. В работе [1] предложена простая асимптотическая формула для оценки поля за диском, основанная на применении метода стационарной фазы к интегралу Кирхгофа. Однако эта формула неприменима на границе тени.

Более сложная задача о дифракции на двух дисках, рассмотренная ниже, позволяет не только численно оценить поле за двумя дисками, но и, в частном случае нулевого расстояния между дисками, получить решение для одного диска, пригодное для расчетов поля на границе тени.

Рассмотрим систему двух параллельных дисков с общей осью (фиг. 1). Плоскости, содержащие диски, обозначим как S_1 и S_2 , а точки плоскостей — A_1 и A_2 . Пусть источник, расположенный в точке A_0 , создает некоторое дифракционное поле в точке приема



Фиг. 1

A_3 . Положение точек $A_0 \div A_3$ будем характеризовать цилиндрической системой координат с общей осью OO_3 и частными для каждой плоскости $S_0 \div S_3$ полярными координатами ρ и φ . Расстояние между точками соседних плоскостей обозначим через r , а интервалы между плоскостями — l . Задачу будем решать в рамках теории Кирхгофа без учета взаимодействия дисков, т. е. считать диски поглощающими.

Полагая, что источник и точка приема удалены от дисков так, что соответствующие $kr \gg 1$, потенциал в точке A_3 можно выразить в виде

двойного интеграла по плоскостям S_1 и S_2 в виде

$$\varphi_{A_3} = \left(-\frac{ik}{2\pi}\right)^2 \iint_{S_1 S_2} \frac{e^{ik(r_{01}+r_{12}+r_{23})}}{r_{01}r_{12}r_{23}} dS_1 dS_2. \quad (1)$$

Выразив r через l и ρ и воспользовавшись формулой бинома Ньютона [2], последнее выражение можно написать в виде

$$\begin{aligned} \varphi_{A_3} = & \left(-\frac{ik}{2\pi}\right)^2 \int_{a_1}^{\infty} \int_{a_2}^{\infty} \frac{\exp[ik(l_{01}+l_{12}+l_{23})]}{l_{01}l_{12}l_{23}} \times \\ & \times \exp \left[ik \left(\frac{\rho_0^2+\rho_1^2}{2l_{01}} + \frac{\rho_1^2+\rho_2^2}{2l_{12}} + \frac{\rho_2^2+\rho_3^2}{2l_{23}} \right) \right] \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp \left\{ -ik \frac{\rho_0\rho_1 \cos(\varphi_0-\varphi_1)}{l_{01}} + \right. \\ & \left. + \frac{\rho_1\rho_2 \cos(\varphi_1-\varphi_2)}{l_{12}} + \frac{\rho_2\rho_3 \cos(\varphi_2-\varphi_3)}{l_{23}} \right\} \rho_1\rho_2 d\rho_1 d\rho_2 d\varphi_1 d\varphi_2. \quad (2) \end{aligned}$$

Подынтегральное выражение имеет точку стационарной фазы $\varphi_0=\varphi_{10}=\varphi_{20}=\varphi_3$. Вклад в этой точке будет определять значение всего интеграла, если сумма параметров $\left(\frac{k\rho_0\rho_1}{l_{01}} + \frac{k\rho_1\rho_2}{l_{12}} + \frac{k\rho_2\rho_3}{l_{23}}\right) \gg 1$, что возможно, на-

пример, в практически важном случае, когда $\rho_1/l_{12} \gg 1$, $k\rho_2 \gg 1$. Применяя метод стационарной фазы для функции двух переменных [3], получим для интеграла по угловым координатам выражение

$$\frac{2\pi}{ik} \sqrt{\frac{l_{01}l_{12}l_{23}}{\rho_1\rho_2(\rho_0\rho_1l_{23} + \rho_0\rho_3l_{12} + \rho_2\rho_3l_{01})}} e^{-ik\left[\frac{\rho_0\rho_1}{l_{01}} + \frac{\rho_1\rho_2}{l_{12}} + \frac{\rho_2\rho_3}{l_{23}}\right]}. \quad (3)$$

Подставив выражение (3) в формулу (2), можно видеть, что переменные интегрирования входят в показатель экспоненты и в амплитудный множитель. Так как в рассматриваемом случае волновые размеры дисков велики ($ka \gg 1$), потенциал в точке приема будет определяться небольшой зоной вблизи кромок дисков, поэтому амплитудный множитель можно считать мало изменяющимся и вынести его из под знака интеграла, положив $\rho_1=a_1$, $\rho_2=a_2$.

Выполнив некоторые алгебраические преобразования в показателе экспоненты и введя новые переменные интегрирования, потенциал в точке приема можно представить в виде

$$\begin{aligned} \varphi_{A_3} = & \frac{\exp \left\{ ik \left[l_{01}+l_{12}+l_{23} + \frac{(\rho_3-\rho_0)^2}{l_{01}+l_{12}+l_{23}} \right] \right\}}{l_{01}+l_{12}+l_{23}} \sqrt{\frac{(l_{01}+l_{12}+l_{23})a_1a_2}{\rho_0a_1l_{23} + \rho_0\rho_3l_{12} + a_2\rho_3l_{01}}} \times \\ & \times \left(-\frac{i}{2}\right) \int_{u_0-mv}^{\infty} du \int_q^{\infty} e^{i\frac{\pi}{2}(u^2+v^2)} dv, \quad (4) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} u_0 = & \sqrt{\frac{2(l_{01}+l_{12})}{\lambda l_{01}l_{12}}} \left[a_1 - \rho_0 \frac{l_{12}}{l_{01}+l_{12}} - \frac{l_{01}(\rho_0l_{23} + \rho_3l_{01} + \rho_3l_{12})}{(l_{01}+l_{12})(l_{01}+l_{12}+l_{23})} \right], \\ m = & \sqrt{\frac{l_{01}l_{23}}{l_{12}(l_{01}+l_{12}+l_{23})}}, \quad q = \sqrt{\frac{2(l_{01}+l_{12}+l_{23})}{\lambda(l_{01}+l_{12})l_{23}}} \left[a_2 - \frac{\rho_0l_{23} + \rho_3(l_{01}+l_{12})}{l_{01}+l_{12}+l_{23}} \right]. \end{aligned}$$

Последнее выражение представлено в форме $\varphi_{A_3} = \varphi_0 \times \beta \times D$, где φ_0 — потенциал падающей волны в точке приема, D — множитель ослабления,

β — коэффициент фокусировки. Множитель ослабления характеризует ослабление на параллельных краях двух полуплоскостей, касательных к краям дисков в точках $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, и может быть рассчитан по результатам работы [3]. Коэффициент β характеризует фокусирующее действие закругленных кромок. Если источник и точка приема лежат на уровне кромок двух равных по диаметру дисков, $\beta = 1$, если источник и точка приема подняты выше этого уровня $\beta < 1$, опущены $\beta > 1$. Поэтому кривизна кромок уменьшает амплитуду флуктуаций дифракционного поля на «свету», не влияет на границе тени и уменьшает глубину тени за дисками. При $l_{12} \rightarrow 0$ выражение (4) позволяет получить потенциал за одним диском радиуса a_1

$$\varphi_{A_3} = \frac{\exp \left\{ ik \left[l_{01} + l_{23} + \frac{(\rho_3 - \rho_0)^2}{l_{01} + l_{23}} \right] \right\}}{l_{01} + l_{23}} \sqrt{\frac{(l_{01} + l_{23}) a_1}{\rho_0 l_{23} + \rho_3 l_{01}}} \frac{e^{-i \frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \int_q^{\infty} e^{i \frac{\pi}{2} v^2} dv.$$

Если источник отодвинуть в бесконечность, что соответствует падению на диск плоской волны, из последней формулы получим для функции ослабления волны выражение

$$w = \frac{\varphi_{A_3}}{\varphi_0} = \sqrt{\frac{a_1}{\rho_3}} \frac{e^{-i \frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \int_q^{\infty} e^{i \frac{\pi}{2} v^2} dv.$$

В области глубокой тени ($q \geq 1,5$) интеграл Френеля может быть заменен первым членом асимптотического разложения, тогда функция ослабления будет

$$w = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{a_1 \lambda}{\rho_3 l_{23}}} \operatorname{ctg} \theta e^{i \left(\Delta\varphi - \frac{\pi}{4} \right)},$$

где $\operatorname{ctg} \theta = \frac{l_{23}}{a_1 - \rho_3}$, $\Delta\varphi$ — набег фазы луча на пути от кромки до точки

приема. Последнее выражение с точностью до равенства $\operatorname{ctg} \theta = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}$

совпадает с полученным в работе [1].

Расчет функции ослабления волны за дисками в плоскости, содержащей источник и ось, был произведен для $l_{01} = 497\lambda$, $l_{12} = 3\lambda$, $l_{23} = 10\lambda$, $\rho_0 = a_1 = a_2 = 10\lambda$, $\rho_3 = 2 \div 10\lambda$. Результаты расчета приведены на фиг. 2 (кривая 1 для одного диска, кривая 2 — для двух). Для сравнения там же построены кривые функции ослабления для одной и двух полуплоскостей (кривые 3, 4). Можно видеть, что потенциал за дисками при углублении в зону тени ослабевает медленнее, чем за полуплоскостями. Ослабление за двумя экранами сильнее, чем за одним.

Метод стационарной фазы для двух переменных, использованный для получения выражения (4), становится неприменимым в случае расположения источника и точки приема на оси симметрии дисков. Точка стационарной фазы не существует, так как все участки контура дисков дают одинаковый вклад в интеграл. Поэтому вблизи оси дисков следует пользоваться иным выражением для функции ослабления.

Вернемся к выражению (2). Будем считать, что $\rho_0 = \rho_3 = 0$, т. е. источник и точка приема лежат на оси OO_3 . Поле в плоскости второго диска выражается через интеграл по переменной φ_1 , который может быть вычислен методом стационарной фазы. Вследствие симметрии задачи потенциал по кольцу $\rho_2 = \text{const}$ постоянен и интегрирование по переменной φ_2 дает просто умножение на величину 2π . В остальном ход решения повторяется.

В результате для функции ослабления было получено выражение

$$w = -\pi \sqrt{\frac{(l_{01} + l_{12} + l_{23}) a_1 a_2}{\lambda l_{01} l_{23}}} e^{i \frac{\pi}{4}} \int_{u_0 - mv}^{\infty} du \int_q^{\infty} e^{i \frac{\pi}{2} (u^2 + v^2)} dv,$$

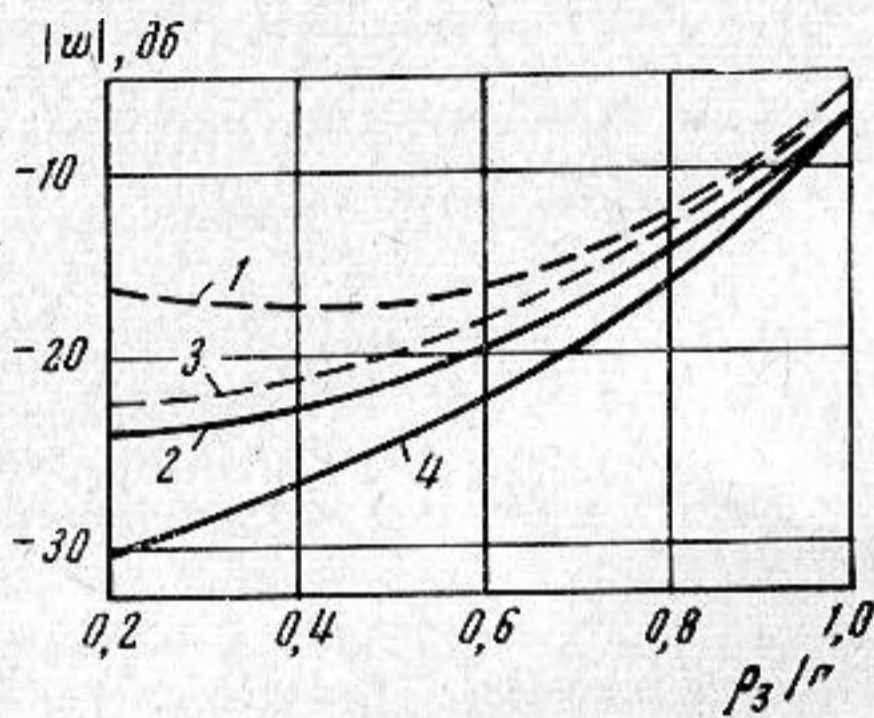
$$u_0 = \sqrt{\frac{2(l_{01} + l_{12})}{\lambda l_{01} l_{12}}} a_1, \quad m = \sqrt{\frac{l_{01} l_{23}}{l_{12} (l_{01} + l_{12} + l_{23})}}, \quad q = \sqrt{\frac{2(l_{01} + l_{12} + l_{23})}{\lambda (l_{01} + l_{12}) l_{23}}} a_2. \quad (5)$$

При $l_{12} \rightarrow 0$ (случай одного диска радиуса a_1) это выражение упрощается:

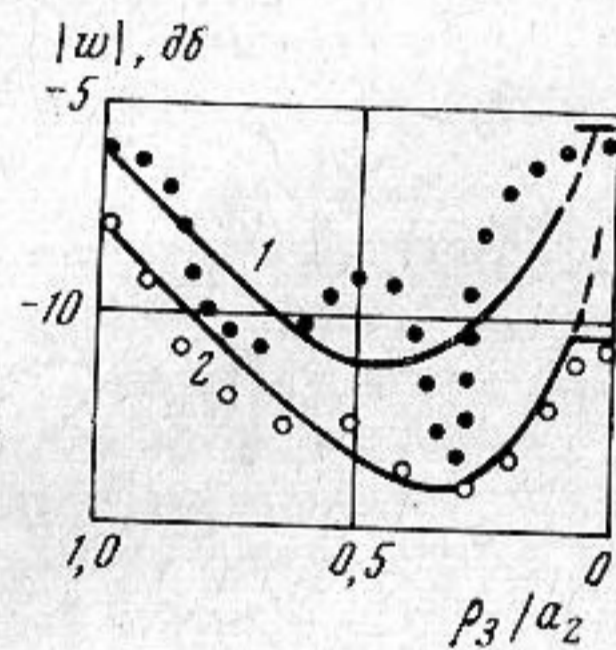
$$w = -i\pi a_1 \sqrt{\frac{2(l_{01} + l_{23})}{\lambda l_{01} l_{23}}} \int_q^{\infty} e^{i \frac{\pi}{2} v^2} dv, \quad q = \sqrt{\frac{2(l_{01} + l_{23})}{\lambda l_{01} l_{23}}} a_1.$$

В области глубокой тени ($q \geq 1,5$) $|w| \approx 1$, как этого и требует приближение Кирхгофа для поля на оси.

Ослабление, создаваемое двумя экранами, было измерено экспериментально. Были использованы два плоских экрана, имевшие круглую часть



Фиг. 2



Фиг. 3

с сектором $\alpha = 200^\circ$. Материал экранов обеспечивал звукопоглощение. Источник располагался на оси экранов, а точка приема перемещалась параллельно плоскости экранов, проходя через ось. Значения параметров были $l_{01} = 28,4\lambda$; $l_{12} = 2\lambda$; $l_{23} = 2,4\lambda$; $a_1 = 1,8\lambda$; $a_2 = 2\lambda$. На фиг. 3 приведены результаты измерения функции ослабления волны для одного (точки) и двух (кружки) экранов в зависимости от расстояния до оси. Поле за одним экраном флуктуирует за счет сложения двух потоков звуковой энергии, идущих с участка кромки, ближайшего к точке приема и наиболее удаленного. На оси экрана сформировалось «светлое пятно», однако ослабление на оси не равно нулю, что объясняется не полной фокусировкой лучей из-за отличия формы экрана от диска. Два экрана создают более глубокую тень, особенно заметно снижая уровни давления в «светлом пятне».

Для расчета функции ослабления были использованы полученные выше формулы. Результаты расчета по формуле (4) показаны кривыми 1 и 2 на фиг. 3. Так как в расчете учитывался вклад только одной точки стационарной фазы, ближайшей к точке приема, то кривая 1 для одного диска хорошо описывает лишь среднее значение экспериментальных величин функции ослабления. При приближении к оси ($\rho_3 / a_2 \rightarrow 0$) функции резко возрастают (штриховые линии). Для этой области была применена формула (5). Расчет показал, что добавление второго диска должно снизить уровень поля на оси примерно на 5 дБ. Для того чтобы получить реальные значения функций ослабления, на оси был введен корректирующий множитель равный $\alpha / 2\pi$. Полученные в результате коррекции значения показаны на фиг. 3 горизонтальными черточками. Эти значения хорошо согласуются с экспериментальными. Введение подобной коррекции

для остальных участков кривых не требуется, так как в этих точках в фокусировке поля участвует значительно меньшая часть контура экранов и коэффициент фокусировки диска β достаточно хорошо описывает действие испытанного экрана.

Кривая 2 для двух дисков значительно точнее описывает ослабление, чем кривая 1, из-за уменьшения флуктуаций дифракционного поля, вызванного относительно большим снижением вклада второй точки стационарной фазы по сравнению с ближайшей к точке приема.

В заключение автор благодарит В. Т. Ляпунова за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Д. Плахов, Г. Я. Саволайнен. Исследование дифракции звука на теле произвольной формы в асимптотическом приближении. Тр. Акуст. ин-та, 1969, вып. VIII, 21–25.
2. G. Millington, E. Hewitt, F. S. Immirzi. Double knife – edge diffraction in field – strength predictions. Proc. I.E.E., monograph, 1962, № 507E, 419–429.
3. Д. Е. Вакман. Асимптотические методы в линейной радиотехнике. М., «Советское радио», 1962.

Поступила
3 мая 1973 г.