Отметим в заключение, что процессы, аналогичные рассмотренным, реализуются в нелинейных резонаторах электромагнитных волн, где, в частности, наблюдались колебания, отвечающие суперпозиции двух встречных пилообразных волн [4].

Автор признателен Л. К. Зарембо за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Эйхенвальд. Акустические волны большой амплитуды. Усп. физ. наук, 1934, 14, 5, 552.
2. S. Temkin. Propagating and Standing Sawtooth Waves. J. Acoust. Soc. America, 1969, 45, 1, 224.
3. M. P. Mortell. Resonant Thermal-acoustic oscillations. Int. J. Engng Sci., 1971, 9, 175.
4. А. И. Весницкий, Л. А. Островский, В. В. Папко, В. Н. Шабанов. Импульсная параметрическая генерация в распределенных системах. Письма в ЖЭТФ, 1969, 9, 5, 274.

Научно-исследовательский радиофизический институт, Горький

Поступила 30 ноября 1972 г.

УДК 534.26

К ВОПРОСУ О СВЯЗИ МЕЖДУ РЕШЕНИЯМИ УРАВНЕНИЙ ГЕЛЬМГОЛЬЦА И ШРЕДИНГЕРА

Э. А. Полянский

Пусть плоский слоисто-неоднородный волновод (полуполоса П: $x \geqslant 0$, $0 \leqslant y \leqslant l$) заполнен жидкой средой с постоянной плотностью и скоростью звука, зависящей только от глубины; волновой процесс считаем гармоническим: $\sim \exp -i\omega t$. Звуковое давление $p(x, y, k)$ удовлетворяет тогда в волноводе уравнению Гельмгольца

$$\Delta p + k^2 n^2(y) p = 0. \tag{1}$$

Границы волновода будем считать идеально мягкими (жесткими):

$$p=0 \ (p_y=0) \quad \text{при } y=0; \quad p=0 \ (p_y=0) \quad \text{при } y=l \tag{2}$$

и пусть

$$p\,(0,\, y,\, k) = f(y,\, k),\ 0 \leqslant y \leqslant l, \tag{3}$$

где $f(y, k)$ — распределение звукового давления при $x=0$. На бесконечности поставим парциальные условия излучения Свешникова [1, 2]:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{du_j(x)}{dx} - i|\sqrt{\lambda_j}|\, u_j(x) \right) = 0; \qquad \lim_{x \to +\infty} u_j(x) = 0, \qquad \lambda_j > 0, \tag{4}$$

где $u_j(x) = \int\limits_0^l p(x,\ y,\ k)\,\varphi_j(y,\ k)\,dy$ и φ_j — ортонормированный базис из собственных функций, удовлетворяющих уравнению

$$\varphi_j''(y,\ k) + k^2 n^2(y) \varphi_j(y,\ k) + \lambda_j \varphi_j(y,\ k) = 0 \tag{5}$$

и условиям (2). Будем предполагать, что $n^2(y) > 0$ — достаточно гладкая функция; $f(y, k)$ — гладкая финитная функция, обращающаяся в нуль вместе с производными на концах отрезка $0 \leqslant y \leqslant l$; $k > 0$ фиксировано.

Решение задачи I (задачи (1)–(4)) единственно [2] и может быть представлено в виде суперпозиции нормальных волн (в виде равномерно сходящегося ряда Фурье) (см. работы [3, 4]):

$$p(x, y, k) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \varphi_j(y, k)\, e^{-\sqrt{\lambda_j}\, x}. \tag{6}$$

В формуле (6) при $\lambda_j<0$ мы полагаем $\lambda_j=-i|\sqrt{\lambda_j}|$. Г. Д. Малюжинцем было предложено заменить уравнение (1) параболическим уравнением М. А. Леонтовича (уравнение типа Шрёдингера) [5]

$$ik\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+k^2n^2(y)u=0 \tag{7}$$

с условиями (2) – (3). Задача II (задачи (7), (2), (3)) корректна [6] и удобна для расчета на ЭВМ, однако вопрос о близости решений $p(x, y, k)$ и $u(x, y, k)$ оставался открытым.

Докажем, что между решениями задач I и II имеет место соотношение

$$p(\alpha, y, k)=\frac{e^{-i\pi/4}\alpha}{\pi^{1/2}}\int\limits_0^\infty \frac{u(k/4t, y, h)}{t^{1/2}}e^{i\alpha^2 t}\,dt, \tag{8}$$

где $\alpha>0$ фиксировано. В самом деле, решение задачи II можно представить равномерно сходящимся рядом Фурье [3]

$$u(x, y, k)=\sum_{j=1}^\infty a_j\varphi_j(y, k)\,e^{-i(\lambda_j/k)x}. \tag{9}$$

Справедливость соотношения (8) легко следует из формул (6), (9) и тождества

$$\frac{e^{-i\pi/4}y^{1/2}}{\pi^{1/2}}\int\limits_0^\infty \frac{e^{-ia/4x}e^{iyx}}{x^{1/2}}dx=e^{-\sqrt{ay}}, \tag{10}$$

где $y>0$ и при $a<0$ $e^{-\sqrt{ay}}=e^{i\sqrt{|a|y}}$ (см. [7] тождества 13, 14, стр. 32; 9, стр. 81; 12, стр. 82). Действительно, используя равномерную сходимость ряда (9), представление для $p(x, y, k)$ в виде (6) и тождество (10) имеем:

$$\frac{e^{-i\pi/4}\alpha}{\pi^{1/2}}\int\limits_0^\infty \frac{u(k/4t, y, k)\,e^{i\alpha^2 t}}{t^{1/2}}dt=\frac{e^{-i\pi/4}\alpha}{\pi^{1/2}}\int\limits_0^\infty\sum_{j=1}^\infty a_j\varphi_j(y, k)\frac{e^{-i\lambda_j/4t}e^{i\alpha^2 t}}{t^{1/2}}dt=$$

$$=\sum_{j=1}^\infty a_j\varphi_j(y, k)\frac{e^{-i\pi/4}\alpha}{\pi^{1/2}}\int\limits_0^\infty\frac{e^{-i\lambda_j/4t}e^{i\alpha^2 t}}{t^{1/2}}dt=\sum_{j=1}^\infty a_j\varphi_j(y, k)\,e^{-\sqrt{\lambda_j}\,\alpha}=p(\alpha, y, k).$$

Соотношение (8) показывает, что решение задачи для уравнения Гельмгольца может быть сведено к решению смешанной задачи для уравнения типа Шрёдингера (задачи II) и квадратуре, что может быть использовано при численном расчете звукового поля в волноводе, а также в ряде других вопросов, связанных с задачами акустики, теорией дифракции и распространения волн.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Свешников. Принцип предельного поглощения для волновода. Докл. АН СССР, 1951, **80**, 3, 345–347.
2. М. В. Федорюк. Уравнение Гельмгольца в волноводе (отгонка краевого условия от бесконечности). Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1972, **12**, 2, 347–387.
3. М. А. Наймарк. Линейные дифференциальные операторы. М., «Наука». 1969.
4. В. Ю. Завадский. Вычисление волновых полей в открытых областях и волноводах. М., «Наука», 1972.
5. В. А. Фок. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. М., «Сов. радио», 1970.
6. Э. А. Полянский. Об одной краевой задаче для уравнения типа Шрёдингера. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1970, **10**, 3, 763–766.
7. Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. М., «Наука», 1969.

Акустический институт
Академии наук СССР

Поступила
15 марта 1973 г.