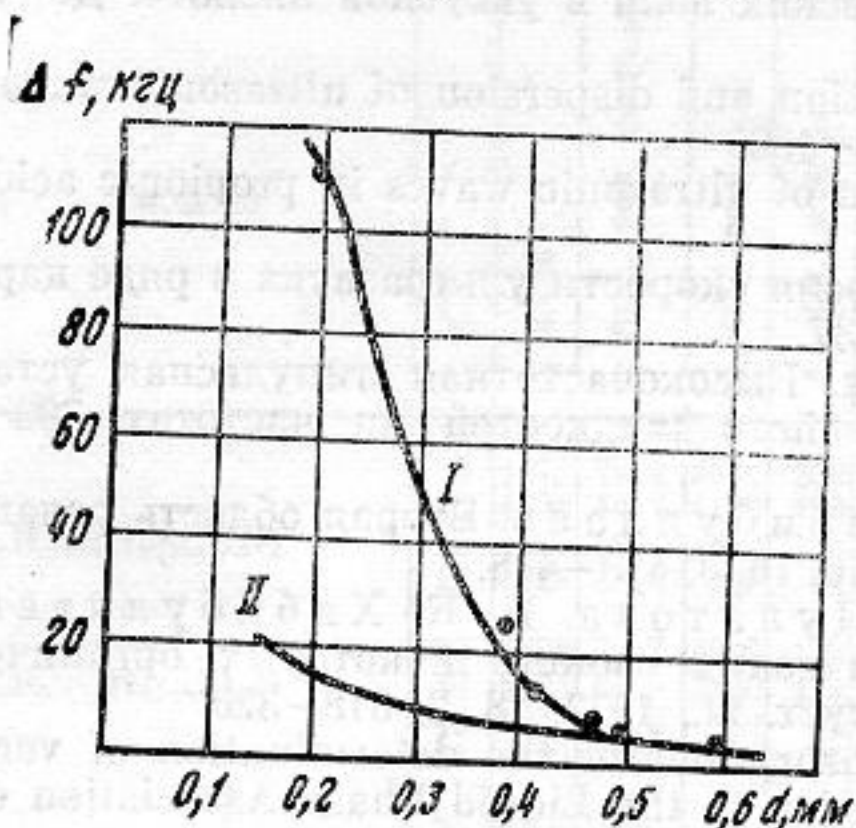
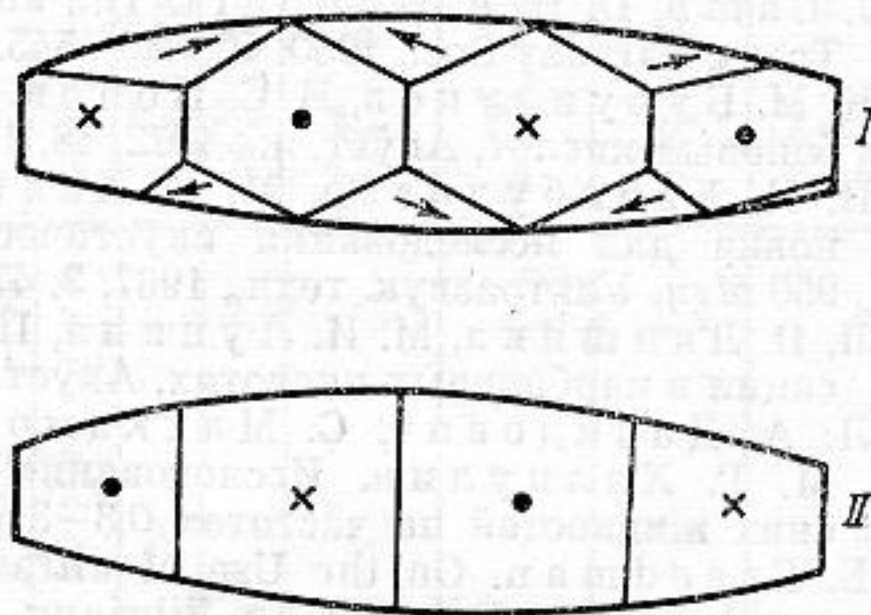


ности величины  $\Delta E$ -эффекта, которым мы пользовались при построении кривой II, несправедливо. В качестве объяснения этого явления можно предложить следующую гипотезу. В случае линзы, т. е. при ограничивающей поверхности второго порядка на поверхности, обязательно возникает вторичная замыкающая доменная структура, даже в том случае, если обе оси легкого намагничивания лежат в главной плоскости линзы и нормаль к плоскости линзы строго совпадает с направлением  $110$ . В то время как для векторов намагниченности основной структуры энергетически выгодными являются направления, параллельные средней плоскости линзы, в замыкающей структуре направление векторов намагниченности будет определяться условием компенсации поверхностных магнитных зарядов. При уменьшении толщины линзы,



Фиг. 1. I — зависимость величины полной перестройки от толщины образца, II — расчетная зависимость  $f(d)$  при условии постоянства  $\Delta E$ -эффекта



Фиг. 2. Схематическое представление магнитных структур образцов в форме линзы при  $H=0$ , I — толщина линзы  $>0,5$  мм, II — толщина линзы  $<0,5$  мм

после некоторого предела, существование замыкающей структуры становится все менее выгодным с точки зрения энергии анизотропии [1]. При этом относительное содержание в образце доменов с векторами намагниченности, лежащими в средней плоскости линзы, будет увеличиваться. Если сравнить теперь схемы магнитных структур, приведенных на фиг. 2, то становится понятным, что образец со структурой I в ненамагниченном состоянии обладает большей упругостью, а следовательно, большей начальной частотой, чем образец со структурой II. Действительно, так как векторы намагниченности замыкающей структуры не совпадают с осью легкого намагничивания, то поверхностные домены находятся в напряженном состоянии, что повышает интегральный модуль упругости образца. Поскольку нет оснований предполагать наличие существенной разницы в модулях упругости намагниченных до насыщения структурах типа I и II, то можно сделать вывод, что с уменьшением толщины образца величина  $\Delta E$ -эффекта возрастает. Это приводит в свою очередь к увеличению полной перестройки резонаторов по частоте при намагничении их до состояния насыщения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Зайкова, Я. С. Шур. О влиянии толщины образца на доменную структуру и магнитные свойства, ФММ, 1971, 32, 6, 1194–1203.

Поступила  
28 сентября 1972 г.

УДК 534.222.2

### О РАЗРЫВНЫХ КОЛЕБАНИЯХ В АКУСТИЧЕСКОМ РЕЗОНАТОРЕ

Л. А. Островский

1. Акустические колебания конечной амплитуды в резонаторах исследовались неоднократно. При этом чаще всего ограничивались нахождением малых поправок к линейным формулам. Если, однако, спектр собственных частот резонатора эквидистантен, то эти поправки секулярно нарастают, и решение теряет силу уже на конечном интервале времени. В этих случаях наиболее наглядным и эффективным является, по-видимому, другой подход к подобным задачам [1–3], применимый при сколь угодно сильных искажениях волны, в том числе при наличии разрывов. Если акусти-

ческое число Маха  $M=v/c$  ( $v$  — скорость частиц,  $c$  — скорость звука) мало, то с точностью до величин порядка  $M^2$  звуковое поле можно представить в виде суперпозиции бегущих навстречу друг другу невзаимодействующих простых волн, связанных лишь условиями на границах резонатора.

Отметим здесь, что при таком подходе естественно использовать еще одно обстоятельство, существенно упрощающее, в частности задачу о вынужденных колебаниях резонатора. Именно, поскольку величины порядка  $M^2$  в решении отбрасываются, то в этом же приближении (для устойчивых колебаний) можно пользоваться линейными граничными условиями, пренебрегая в них различием между эйлеровой и лагранжевой формами записи.

2. Рассмотрим сперва вынужденные колебания в одномерном резонаторе длины  $L$  с твердыми стенками, одна из которых неподвижна, а другая колеблется по закону  $x=x_0 \sin \omega t$ , причем  $x_0 \ll \lambda$ , где  $\lambda$  — длина волны. Такая задача рассматривалась в работах [2, 3], где находились установившиеся колебания при точном резонансе на основной частоте. Используя указанное выше обстоятельство, нетрудно рассмотреть и более сложные случаи. В данном приближении граничные условия будут нулевыми для всех гармоник колебаний в резонаторе, кроме первой. На частоте  $\omega$  система ведет себя как осциллятор с нелинейными потерями, обусловленными возбуждением высших гармоник, которые поглощаются сильнее основной. В случае возникновения разрывов основную роль играет их диссипация. Поскольку для синусоидальных начальных условий соотношение между амплитудой волны  $v_s$  и ее первой гармоникой  $v_1$  на каждом этапе эволюции волны известно, то решение задачи не представляет трудностей.

Рассмотрим, например, процесс установления колебаний в резонаторе на том этапе, когда возбуждаемые встречные волны пилообразны. Относительное изменение  $g$  амплитуды  $v_s$  такой волны за один пробег в резонаторе туда и обратно (полагаемое малым) равно  $(\gamma+1)kLv_s/\pi c$ , где  $k$  — волновое число несущей волны. При точном резонансе ( $\omega=\omega_n=n\pi c/L$ , где  $n$  — целое число) для первой гармоники каждой из бегущих волн  $v_1=(2/\pi)v_s$  мы получим уравнение

$$\frac{2L}{c} \dot{v}_1 + g(v_1)v_1 = \omega x_0. \quad (1)$$

Отсюда при  $v_s(t_0)=v_{s0}$  (где  $t_0$  выбирается на «пилообразном» этапе)

$$M_s = \frac{v_{s0} + \sqrt{a_{\text{вх}}} \operatorname{th}[(t-t_0)/\tau]}{\sqrt{a_{\text{вх}}} + v_{s0} \operatorname{th}[(t-t_0)/\tau]}, \quad (2)$$

где

$$M_s = v_s/c, \quad a_{\text{вх}} = \pi^2 x_0^2 / 2(\gamma+1)L, \quad \tau = 2\omega^{-1} \sqrt{2L/(\gamma+1)x_0}.$$

Следовательно, для  $n$ -й моды характерное время установления пропорционально  $1/n\sqrt{x_0}$ . В установившемся режиме  $v_s \sim \sqrt{x_0}$  в согласии с выводами работ [2, 3].

Нетрудно также учесть расстройку вынуждающей силы относительно  $n$ -й резонансной частоты. Считая колебания по-прежнему пилообразными и рассматривая их первую гармонику, получим резонансную кривую системы

$$M_s^2 = \sqrt{a_s^2 + \delta^4} - \delta^2, \quad (3)$$

где  $\delta = \pi\sqrt{2}(\omega - \omega_n)/(\gamma+1)\omega_n$ . Ширина полосы резонанса  $2\Delta$  (определяемая по уровню  $v_{s \text{ max}}/\sqrt{2}$ ) равна  $\omega_n \sqrt{3(\gamma+1)x_0/4L}$ , т. е.  $2\Delta \sim n\sqrt{x_0}$  \*. Эквивалентная добротность такого нелинейного осциллятора  $Q_{\text{эф}} = \omega_n/2\Delta$  пропорциональна  $x_0^{-1/2}$  и при заданном  $x_0$  не зависит от  $n$ .

3. Представление решения в виде суперпозиции простых волн дает наглядные результаты и в другом случае — колебаний резонатора с обеими свободными границами ( $p'(0, t) = p'(L, t) = 0$ , где  $p'$  — возмущение давления). Так обстоит дело для обычных резонаторов на твердом теле. Поскольку при каждом переотражении от границы  $p'$  изменяет знак, то участки сжатия и разрежения в волне меняются местами, искажение происходит в обратную сторону и нелинейный эффект не накапливается. Именно поэтому, несмотря на эквидистантность спектра, поправка первого порядка к линейному решению может, как известно, оставаться малой. Однако существование разрывов все же возможно, если они успевают возникнуть за один пробег волной длины резонатора  $L$  (ясно, что тогда  $L \gtrsim \lambda/M \gg \lambda$ , т. е. это условие гораздо жестче, чем в случае твердых стенок). Правда, для свободных колебаний, ввиду их затухания, это условие в некоторый момент перестает выполняться и разрывы исчезают, однако вынужденные колебания в такой системе на достаточно высоких частотах могут быть существенно несинусоидальными.

\* Формула (3) фактически справедлива лишь в окрестности частоты  $\omega_n$ , не превышающей  $2\Delta$ ; при больших расстройках фазовые сдвиги первой гармоники на границе существенно изменяют форму колебаний.

Отметим в заключение, что процессы, аналогичные рассмотренным, реализуются в нелинейных резонаторах электромагнитных волн, где, в частности, наблюдались колебания, отвечающие суперпозиции двух встречных пилообразных волн [4].

Автор признателен Л. К. Зарембо за полезные замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Эйхенвальд. Акустические волны большой амплитуды. Усп. физ. наук, 1934, 14, 5, 552.
2. S. Temkin. Propagating and Standing Sawtooth Waves. J. Acoust. Soc. America, 1969, 45, 1, 224.
3. M. P. Mortell. Resonant Thermal-acoustic oscillations. Int. J. Engng Sci., 1971, 9, 175.
4. А. И. Весницкий, Л. А. Островский, В. В. Папко, В. Н. Шабанов. Импульсная параметрическая генерация в распределенных системах. Письма в ЖЭТФ, 1969, 9, 5, 274.

Научно-исследовательский  
радиофизический институт,  
Горький

Поступила  
30 ноября 1972 г.

УДК 534.26

### К ВОПРОСУ О СВЯЗИ МЕЖДУ РЕШЕНИЯМИ УРАВНЕНИЙ ГЕЛЬМГОЛЬЦА И ШРЕДИНГЕРА

Э. А. Полянский

Пусть плоский слоисто-неоднородный волновод (полуполоса  $\Pi$ :  $x \geq 0$ ,  $0 \leq y \leq l$ ) заполнен жидкой средой с постоянной плотностью и скоростью звука, зависящей только от глубины; волновой процесс считаем гармоническим:  $\sim \exp -i\omega t$ . Звуковое давление  $p(x, y, k)$  удовлетворяет тогда в волноводе уравнению Гельмгольца

$$\Delta p + k^2 n^2(y) p = 0. \quad (1)$$

Границы волновода будем считать идеально мягкими (жесткими):

$$p = 0 \quad (p_y = 0) \quad \text{при } y = 0; \quad p = 0 \quad (p_y = 0) \quad \text{при } y = l \quad (2)$$

и пусть

$$p(0, y, k) = f(y, k), \quad 0 \leq y \leq l, \quad (3)$$

где  $f(y, k)$  — распределение звукового давления при  $x = 0$ . На бесконечности поставим парциальные условия излучения Свешникова [1, 2]:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{du_j(x)}{dx} - i|\sqrt{\lambda_j}| u_j(x) \right) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} u_j(x) = 0, \quad \lambda_j > 0, \quad (4)$$

где  $u_j(x) = \int_0^l p(x, y, k) \varphi_j(y, k) dy$  и  $\varphi_j$  — ортонормированный базис из собственных функций, удовлетворяющих уравнению

$$\varphi_j''(y, k) + k^2 n^2(y) \varphi_j(y, k) + \lambda_j \varphi_j(y, k) = 0 \quad (5)$$

и условиям (2). Будем предполагать, что  $n^2(y) > 0$  — достаточно гладкая функция;  $f(y, k)$  — гладкая финитная функция, обращающаяся в нуль вместе с производными на концах отрезка  $0 \leq y \leq l$ ;  $k > 0$  фиксировано.

Решение задачи I (задачи (1)–(4)) единственно [2] и может быть представлено в виде суперпозиции нормальных волн (в виде равномерно сходящегося ряда Фурье) (см. работы [3, 4]):

$$p(x, y, k) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \varphi_j(y, k) e^{-\sqrt{\lambda_j} x}. \quad (6)$$