Из формулы (1) с учетом выражений (2) и (3) нетрудно получить выражение для коэффициента диффузии аэрозольных частиц размерами $0{,}1 \div 10$ *мкм*, находящихся в звуковом поле,

$$D_{ак} = D_э\,(1 + \alpha)\,/\,(1 + 3\mathrm{Re}\,/\,16). \tag{4}$$

Выражение (4) было рассчитано при различных значениях параметров звукового поля и аэрозоля. Результаты расчетов приведены на фиг. 1 и 2. На фиг. 1 представлены графики относительного изменения максимального отклонения коэффициента диффузии $D_{ак\,max}$ в звуковом поле в функции от размера частиц с плотностью $\delta = 1.0$ *г/см*^{3} при значениях амплитуды колебательной скорости $U_0 = 700$ *см/сек* (кривая *1*), $U_0 = 500$ *см/сек* (кривая *2*) и $U_0 = 300$ *см/сек* (кривая *3*) в воздухе на частоте $f = 1000$ *гц*. Как видно из графиков, с увеличением амплитуды звуковой волны увеличивается отклонение значения $D_{ак}$ от эйнштейновского значения в правой ветви графиков для частиц больше 2 *мкм*. Отклонение значения $D_{ак}$ от эйнштейновского значения вызвано изменением подвижности частиц: в правых ветвях графиков — из-за изменения силы сопротивления при осееновском обтекании (осееновская добавка является гармонической функцией времени), в левых ветвях — из-за влияния прерывистости среды.

С ростом частоты увеличивается различие между $D_{ак}$ и $D_э$. Для иллюстрации на фиг. 2 приведены кривые относительного изменения $D_{ак.\,max}$ в функции от частоты для частиц радиуса $R = 5$ *мкм*, $\delta = 1{,}0$ *г/см*^{3} при $P_0 = 700$ *см/сек* (кривая *1*), $U_0 = 500$ *см/сек* (кривая *2*) и $U_0 = 300$ *см/сек* (кривая *3*).

Как видно из представленных результатов, из-за изменения подвижности малых частиц в звуковом поле имеет место значительное отклонение (достигающее двукратного) коэффициента диффузии от эйнштейновского значения. В приведенных расчетах не учитывалось изменение температуры в звуковой волне, так как в работе [2] показано, что влияние этого фактора на коэффициент диффузии незначительно; изменение составляет около 0,1% от значения $D_э$.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Jessel, V. Timochenko. Sur la dynamique des processus de coagulation acoustique Série Acoustique. C. R. Acad. sci., 1971, **272**, 1457—1460, Sér. B.
2. Физические основы ультразвуковой технологии. Под ред. Л. Д. Розенберга. М., «Наука», 1970, 519—521.
3. В. И. Тимошенко. К расчету относительного движения аэрозольных частиц в акустическом поле. Акуст. ж., 1970, **16**, 4, 570—574.
4. Н. А. Фукс. Успехи механики аэрозолей. М., Изд-во АН СССР, 1961.

Таганрогский радиотехнический институт

Поступила 5 июля 1972 г.

УДК 534.231.1:539.3

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В ВЯЗКОУПРУГОЙ СЛОИСТОЙ СРЕДЕ

А. М. Швиданенко

Рассмотрим прохождение нормально падающей волны через слоистую пластинку, образованную чередующимися слоями из двух различных материалов; два смежных слоя, a и s, образуют повторяющийся элементарный слой. Амплитуды волн в слоях a и s можно определить при помощи матриц $\|a\|$ и $\|b\|$. Тогда зависимость между амплитудами падающих, прошедшей и отраженных i-м элементарным слоем волн можно задать в виде матрицы $\|d\|$, равной произведению матриц $\|a\|$ и $\|b\|$ [1].

Элементы матрицы $\|d\|$ равны:

$$d_{11} = P_a P_s \frac{(1-2V^2)^2}{1-V^2} - \frac{P_s V^2}{P_a(1-V^2)}, \qquad d_{12} = P_a P_s \frac{(1-2V^2)V}{1-V^2} + \frac{P_s V}{P_a(1-V^2)},$$
$$d_{21} = -\frac{P_a}{P_s}\frac{V(1-2V^2)}{1-V^2} - \frac{V}{P_a P_s(1-V^2)}, \qquad d_{22} = \frac{1}{P_a P_s(1-V^2)} - \frac{P_a V^2}{P_a(1-V^2)}. \tag{1}$$

Здесь V — коэффициент отражения от границы слоев a и s; P_a и P_s — коэффициенты, учитывающие набег фазы и затухание колебаний при прохождении волны через слой a и s толщиной d_a и d_s:

$$P_a = l^{-ik_a d_a}, \qquad P_s = l^{-ik_s d_s}$$

Нетрудно убедиться, что определитель матрицы $\|d\|$ равен единице. Это позволяет установить следующие рекуррентные соотношения между амплитудами в смежных элементарных слоях:

$$A_{n-1} - 2XA_n - A_{n+1} = 0,$$
$$B_{n-1} - 2XB_n - B_{n+1} = 0, \tag{2}$$

где A_i и B_i — амплитуды волн, распространяющиеся в направлении падения волны и в обратном направлении, а $2X = d_{11} + d_{22}$. Соотношения (2) по форме совпадают с уравнениями для четырехполюсника [2] и дают возможность определять амплитуды упругих волн в произвольном слое пластинки при помощи полиномов Чебышева.

Пусть A_{n+1} — амплитуда волны, прошедшей через пластинку из n слоев. Тогда

$$B_{n+1} = 0, \qquad B_n = V_1 A_n, \qquad A_{n+1} = \frac{\rho_s}{\rho_0}(1 + V_1)A_n,$$

$$A_{n-1} = A_n(d_{11} - V_1 d_{12}). \tag{3}$$

Здесь ρ_0 и ρ_s — плотности окружающей пластинку среды и слоя s, V_1 — коэффициент отражения границы слоя s и окружающей среды. Применяя рекуррентные соотношения (2) с начальными условиями (3), получим

$$A_{n-p} = \frac{\rho_0}{\rho_s}\frac{A_{n+1}}{(1 - V_1)\sqrt{1 - X^2}}[(d_{11} - d_{12}V_1)U_p(X) - U_{p-1}(X)], \tag{4}$$

$$B_{n-p} = \frac{\rho_0}{\rho_s}\frac{A_{n+1}}{(1 - V_1)\sqrt{1 - X^2}}[(V_1 d_{11} - d_{21})U_p(X) - V_1 U_{p-1}(X)],$$

где $U_p(X)$ являются полиномами Чебышева второго рода. При $p = n - 1$ мы получим выражения для амплитуд падающей A_0 и отраженной пластинкой B_0 волн. Из этих соотношений следуют формулы для коэффициентов отражения и прозрачности n-слойной пластинки, погруженной в однородную среду:

$$\overline{V} = \frac{B_0}{A_0} = [\rho_s k_1(1 + V_1)\sqrt{1 - X^2}]/\rho_0 L,$$
$$\overline{W} = \frac{A_{n+1}}{A_0} = [(d_{11}^0 k_3 - d_{21}^0 k_2)U_{n-1}(X) + (d_{21}^0 - d_{11}^0 V_1)U_{n-2}(X)]/L, \tag{5}$$

где

$$L = (k_2 d_{22}^0 - k_3 d_{12}^0)U_{n-1}(X) + (d_{12}^0 V_1 - d_{22}^0)U_{n-2}(X),$$

$$k_1 = d_{11}^0 d_{22}^0 - d_{12}^0 d_{21}^0, \qquad k_2 = d_{11} - d_{12}V_1,$$

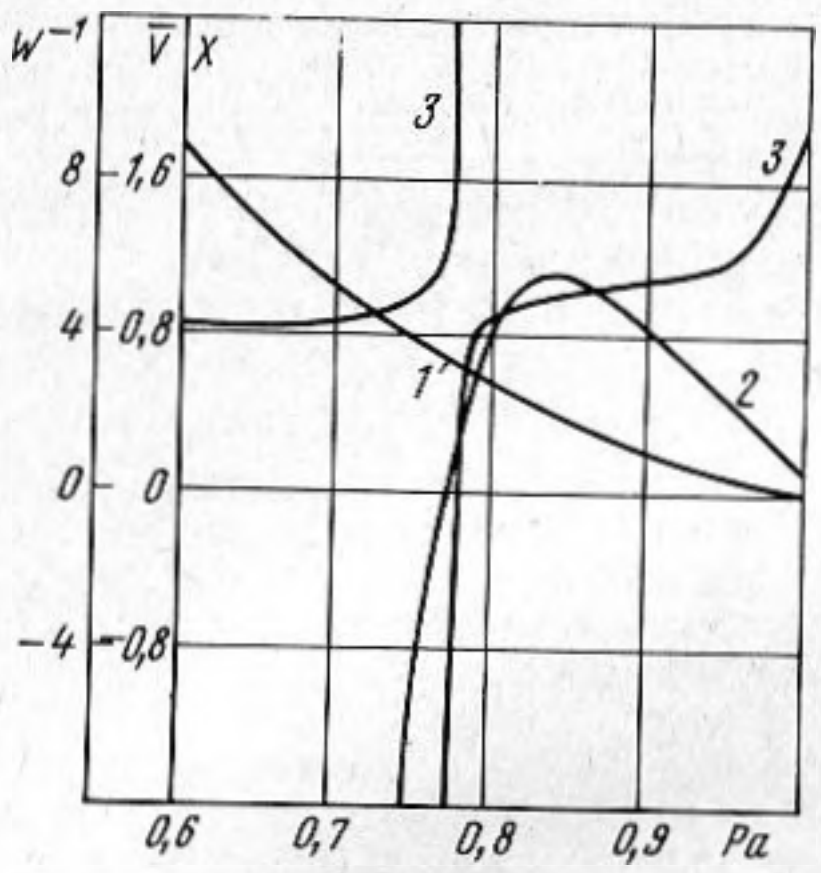
$$k_3 = d_{11}V_1 - d_{21}.$$

Элементы матрицы $\|d^0\|$ определяются из выражений для d_{ij} заменой в матрице $\|a\|$ значений V на V_0 и ρ_s на ρ_0, где V_0 и ρ_0 — соответственно коэффициент отражения границы между окружающей средой и слоем a и плотность окружающей среды.

Необходимо рассмотреть зависимость коэффициентов $\overline{V}$ и $\overline{W}$ от величины X. Здесь различаются два случая при действительных значениях X: $|X| > 1$ и $|X| < 1$. В первом случае, полагая $\theta = \operatorname{Arch} X$, мы получим $U_n(X) = \operatorname{sh} n\theta$ и $\sqrt{1 - X^2} = \operatorname{sh}\theta$. Величина $U_n(X)$ будет всегда отлична от нуля и с увеличением n быстро растет. Таким образом, при увеличении числа слоев коэффициент прозрачности пластинки $\overline{W}$ будет резко уменьшаться. При этом коэффициент отражения $\overline{V}$ изменяется незначительно. В пластинке происходит затухание колебаний. Во втором случае при

$|X| < 1$, положив $\theta = \arccos X$, мы получим $U_n(X) = \sin n\theta$, $\sqrt{1 - X^2} = \sin\theta$. С изменением n величина коэффициента прозрачности $\overline{W}$ будет осциллировать, но затухания волн в пластинке не будет. Таким образом, в упругой слоистой пластинке могут распространяться без затухания лишь волны, длины которых соответствуют значениям X по модулю, меньшим единицы.

Представляет интерес случай, когда материалы слоев a и s обладают вязкоупругими свойствами. Волновые числа k_a и k_s, а также величина X будут комплексными: $k_a = k_a^0 + i\gamma_a$, $k_s = k_s^0 + i\gamma_s$, $X = X_1 + iX_2$. Выразим k_a и k_s через реологические параметры материала соответственного слоя. Для



этого используем выражения для модулей упругости при гармонических колебаниях с частотой Ω в виде комплексных операторов упругостной наследственности [3]:

$$E^* = E' + iE'' = E_0\left[1 + \frac{\omega_0}{\delta_1}F(\delta_1)\right], \qquad \delta_1 = -\omega_0 - \omega_\infty,$$

$$G^* = G' + iG'' = G_0\left[1 - \frac{\delta_2 + \omega_\infty}{\delta_2}F(\delta_2)\right], \qquad \delta_2 = -\omega_\infty - \frac{3\omega_0}{2 + 2\nu_0}, \tag{6}$$

$$(G^*)^{-1} = L' + iL'' = G_0^{-1}\left[1 - \frac{3\omega_0}{(2 + 2\nu_0)\delta_3}F(\delta_3)\right], \qquad \delta_3 = -\omega_\infty,$$

где

$$F(\delta) = \frac{1 + \dfrac{\Omega^\lambda}{\delta}\cos\dfrac{\pi\lambda}{2} + i\dfrac{\Omega^\lambda}{\delta}\sin\dfrac{\pi\lambda}{2}}{1 + 2\dfrac{\Omega^\lambda}{\delta}\cos\dfrac{\pi\lambda}{2} + \dfrac{\Omega^{2\lambda}}{\delta^2}}.$$

Здесь E_0, G_0 — мгновенные модули упругости, ω_0, ω_∞, λ — реологические параметры материала, определяемые экспериментально. Для продольной волны в слое

$$k_l = k_l^0 + i\gamma_l = \frac{\Omega\rho^{1/2}}{M^2 + N^2}\sqrt{(PM + RN)^2 + (PN + RM)^2}\, l^{i\varphi/2},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{PN + RM}{PM + RN},$$

$$M = 4G' - E', \qquad P = 3L' - E'L' - L''E'', \qquad N = 4G'' - E'',$$
$$R = 3L'' - E'L'' + L'E'', \tag{7}$$

и для поперечной волны

$$k_t = k_t^0 + i\gamma_t = \Omega\rho^{1/2}\sqrt{(L')^2 + (L'')^2}\, l^{i\psi/2}, \qquad \operatorname{tg}\psi = -\frac{L''}{L'}. \tag{8}$$

Коэффициент отражения для границы вязкоупругих слоев будет комплексной величиной и выражается через волновые числа следующим образом [1]:

$$V = V' + iV'' = \frac{\rho_s k_a - \rho_a k_s}{\rho_s k_a + \rho_a k_s}. \tag{9}$$

Подставляя выражение (9) в уравнение (1), мы получим выражения для комплексной величины $X = X_1 \pm iX_2$. Используя выражения для комплексных величин V и X, из уравнений (5) можно определить коэффициенты отражения и прозрачности вязкоупругой пластинки.

В качестве примера проведено исследование распространения звуковой волны в слоистой пластинке из стеклопластика, погруженной в воду. Пластинка состоит из десяти чередующихся слоев стекло — смола. Приняты следующие значения величин: модуль упругости стекла $E_a = 0{,}981 \cdot 7 \cdot 10^{10}$ $н/м^2$, связующего вещества — $E_s = 0{,}981 \cdot 0{,}315 \cdot 10^{10}$ $н/м^2$, объемное содержание стекла $\xi = 0{,}75$, $\rho_a / \rho_s = 2{,}6$; $\rho_0 / \rho_s = 1$. При этом $P_a = P_s$, $V_0 = 0{,}5$, $V = 0{,}71$, $V_1 = 0{,}33$.

На фигуре приведены графики зависимости величин X, $\overline{W}^{-1}$, $\overline{V}$ (кривые *1—3*) от P_a.

Как видно из фигуры, прозрачность пластинки при значениях, близких к единице и больше единицы, резко уменьшается. При этом коэффициент отражения звука от пластинки изменяется незначительно. При значении $P_a = 0{,}772$ в пластинке наблюдается возникновение стоячих волн.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Бреховских. Волны в слоистых средах, М., Изд-во АН СССР, 1957.
2. Л. Бриллюэн, М. Пароди. Распространение волн в периодических структурах, М., Изд-во иностр. лит., 1959.
3. Г. А. Ван Фо Фы. Однородные и армированные пластинки при периодических воздействиях. Прикладная механика, 1966, 2, 8.

Институт механики
Академии наук УССР

Поступила
29 декабря 1969 г.