АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XIX 1973 Вып. 3

УДК 534.26

О ЯВЛЕНИИ ВЫХОДА НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В КЛИНЕ, ЛЕЖАЩЕМ НА ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ, ИЗ КЛИНА В ПОЛУПРОСТРАНСТВО

В. К. Кузнецов

Излагаются результаты теоретического и модельного исследования гидроакустической задачи о распространении звука в прибрежной полосе шельфа, т. е. задачи о волновом поле в жидком клине, лежащем на полупространстве, в котором скорость звука больше, чем в клине. В клине, граничащем с полупространством, наряду с рефракцией нормальных волн в «горизонтальной» плоскости, аналогичной рефракции нормальных волн в клине с идеально отражающими границами, имеет место смещение нормальных волн в вертикальной плоскости, которое на определенном, индивидуальном для каждой нормальной волны расстоянии от ребра клина приводит к выходу ее из клина в полупространство.

Основная трудность строгого решения волновой задачи для клиновидной области, лежащей на полупространстве, проистекает из-за неприменимости метода разделения переменных r, φ, обусловленной характером границы клин — полупространство $\varphi = \Phi$. Эта граница описывается показателем преломления $n = k_2 / k_1$, где k_1 и k_2 — волновые числа сред клина и полупространства соответственно. В отличие от «идеального» клина строгое решение здесь не представимо в виде набора невзаимодействующих нормальных волн. Однако путем нестрогого разделения переменных r, φ можно получить приближенное решение в виде нормальных волн. Дисперсионное уравнение оказывается при этом аналогичным уравнению для плоского слоя [1].

$$\operatorname{ctg} \mu_1 \Phi = -\frac{\sqrt{k_1^2 (1 - n^2) r^2 - \mu_1^2}}{l \mu_1}, \tag{1}$$

где $l = \rho_2 / \rho_1$ — отношение плотностей сред клина и полупространства соответственно. Профиль нормальной волны (кривая распределения амплитуды звукового давления по координате φ) описывается функциями

$$\sin \mu_1 \varphi, \; 0 \leqslant \varphi \leqslant \Phi; \quad l^{-\mu_2 \varphi}, \; \Phi < \varphi < \pi + \Phi, \tag{2}$$

причем величины μ_1 и μ_2 связаны соотношением $\mu_2^2 = r_1^2 k_1^2 (1 - n^2) - \mu_1^2$. Вид профиля зависит от координаты r, поскольку μ_1, μ_2 есть функции r, как это видно из формулы (1).

Из формулы (1) следует, что вещественные значения μ_1 получаются в области

$$r \geqslant r_m = \lambda_1 (2m - 1) / 4\Phi \sqrt{1 - n^2}, \tag{3}$$

где $m = 1, 2, 3, \ldots$ — порядок нормальной волны, $\lambda_1 = 2\pi / k_1$. В этой области имеет место волноводное распространение. Для расчетов полей нормальных волн в данной задаче трансцендентное уравнение (1), допускающее решение лишь численным и графическим методами, мало пригодно. Более

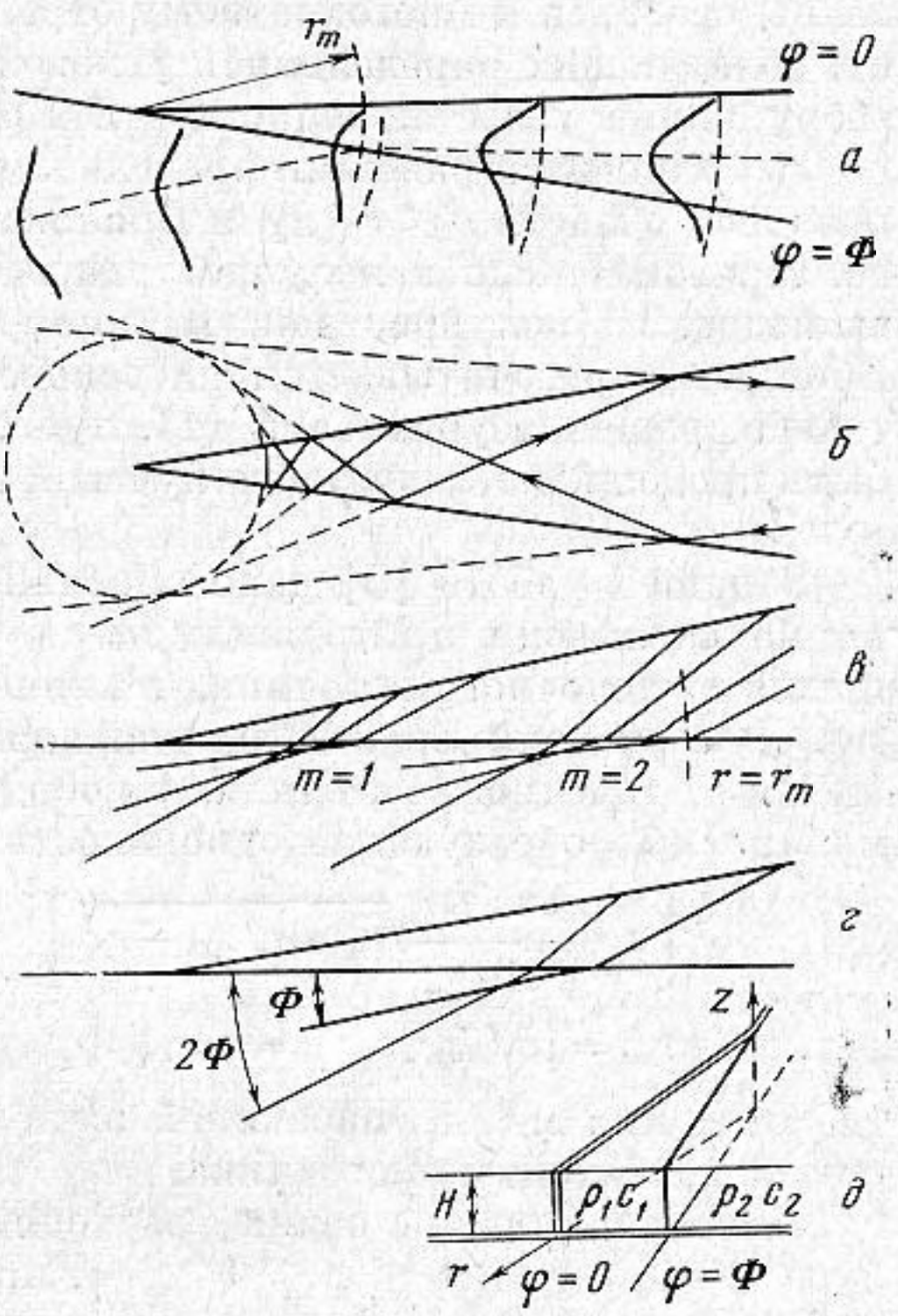
пригодным во многих отношениях является полученная нами [2] параметрическая форма дисперсионного уравнения в виде системы двух уравнений

$$\mu_1 = m\frac{\pi}{\Phi} - \frac{1}{\Phi}\operatorname{arctg}\left[l\sqrt{\frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon^2-n^2}}\right], \tag{4а}$$

$$r = \mu_1 / k_1\sqrt{1-\varepsilon^2}. \tag{4б}$$

Параметр ε принимает значения в пределах $n \leqslant \varepsilon \leqslant 1$. Система (4), в частности, позволяет весьма просто рассчитать профили нормальных волн.

На фиг. 1, *а* изображена последовательность профилей нормальной волны первого порядка для различных значений r. На больших расстояниях от ребра клина $\mu_1 \approx m\pi / \Phi$ и профиль нормальной волны подобен профилю нормальной волны в клине с акустически мягкими границами; почти вся энергия нормальной волны оказывается локализованной в пределах клина. По мере приближения к ребру клина μ_1 убывает, и максимум профиля нормальной волны смещается к нижней границе. Вместе с этим растет экспоненциальная часть профиля в пределах полупространства. Нормальная волна как бы постепенно погружается в полупространство. На линии $r = r_m$ максимум профиля (нижний максимум, если речь идет о нормальных волнах второго и высших порядков) опускается на линию границы $\varphi = \Phi$. Линию $r = r_m$ мы назовем линией выхода нормальной волны из клина в полупространство. Это место соответствует критической для данной нормальной волны «толщине» клина.



Фиг. 1

Таким образом, вся область клина по отношению к нормальной волне данного порядка разделяется на две зоны — зону волноводного распространения $r > r_m$ и неволноводную зону $r < r_m$. В волноводной зоне нормальные волны испытывают рефракцию подобно нормальным волнам в идеальном клине [3, 4].

Нормальная волна, распространяющаяся из бесконечности ($r = \infty$) первоначально под углом γ_0 по отношению к ребру клина может претерпеть полное отражение в результате рефракции и уйти в бесконечность, не выходя из волноводной зоны и, следовательно, из клина. Линия поворота нормальной волны (геометрическое место точек поворота ее лучей) при этом определяется формулой

$$r_{\text{пов}} = \left\{m\pi - \operatorname{arctg}\left[l\frac{1-\cos^2\gamma_0}{\sqrt{\cos^2\gamma_0 - n^2}}\right]\right\}\frac{1}{k_1\Phi\sin\gamma_0}. \tag{5}$$

Очевидно, что в этом случае $r_{\text{пов}} > r_m$ и $\cos\gamma_0 > n$. Если же $\cos\gamma_0 < n$ (6), то нормальная волна выходит за пределы волноводной зоны и «преломляется» в полупространство. При этом имеет место частичное отражение ее снова в волноводную зону.

Рефракция нормальных волн точечного источника в волноводной зоне

и структура поля в плоскости $\varphi = \text{const}$ рассмотрены нами в другой работе [2]. Здесь мы ограничимся рассмотрением волновой картины в вертикальной плоскости $z = \text{const}$. Для наглядности полезно ввести понятие траектории нормальной волны; ее проекцией в плоскости $z = \text{const}$ является линия расположения нижнего максимума профиля нормальной волны. В точке $r = r_m$ она пересекает границу клина $\varphi = \Phi$. Дисперсионное уравнение (1) и все вытекающие из него соотношения пригодны для описания поля в волноводной зоне и не пригодны за ее пределами, в области $r < r_m$. Для описания нормальной волны, вышедшей в полупространство, необходима несколько иная точка зрения: нормальную волну в клине надо представить в виде волн Бриллюэна аналогично тому, как представляется нормальная волна в плоском волноводе. Тогда распространение нормальной волны сводится к многократному отражению пары пучков лучей Бриллюэна, обладающих определенной угловой шириной. По мере приближения к ребру клина углы падения лучей Бриллюэна уменьшаются и на линии $r = r_m$ становятся равными предельному углу полного отражения. В неволноводной области $r < r_m$ лучи Бриллюэна преломляются в полупространство. Преломленные в полупространство лучи Бриллюэна и представляют вышедшую в полупространство нормальную волну. Лучевая картина волн Бриллюэна рассчитывается на основе решения уравнения (1). Следовательно, решение уравнения (1), пригодное в волноводной области, может быть продолжено с помощью лучевой концепции Бриллюэна в неволноводную зону.

В нашей работе [5] дано описание волн Бриллюэна для «плоских» нормальных волн, приходящих из $r = \infty$, и для нормальных волн, расходящихся от точечного источника в клине с идеально отражающими границами. Лучами волн Бриллюэна для нормальной волны порядка m, расходящейся от точечного источника с координатами $r = r_0$, $z = 0$, являются прямолинейные образующие однополостных гиперболлоидов вращения

$$\left[z - \frac{\cos\gamma_0}{\sin\gamma_0} \sqrt{r_0^2 \sin^2\gamma_0 - r_k^2} \right]^2 - r^2 \operatorname{ctg}\gamma_0 - r_k^2 \frac{\cos^2\gamma_0}{\sin^4\gamma_0} = 0,$$

$$r_k^2 = \mu^2 / k_1^2, \quad \mu = m\pi / \Phi, \quad \cos\gamma_0 = \cos\vartheta_0 (1 - r_k^2 / r^2)^{1/2},$$

где ϑ_0 – угол между проекцией луча Бриллюэна в плоскости $\varphi = \text{const}$ и осью z на выходе из источника.

Поле нормальной волны, расходящейся из «точечного» источника – дуги $z = 0$, $r = r_0$, $0 < \varphi < \Phi$ | |, представляется при этом системой лучей, вышедших из дуги под углами $\psi = \pm \arccos \mu / k_1 r_0$ к ней. Эти лучи претерпевают многократные отражения от граней клина, оставаясь все время на поверхности своих гиперболоидов. На фиг. 1, *б* изображен ход одного луча в проекции на плоскости $z = \text{const}$. На «горловой» окружности

$$z = \frac{\cos\gamma_0}{\sin\gamma_0} \sqrt{r_0^2 \sin^2\gamma_0 - r_k^2}, \quad r = r_k / \sin\gamma_0,$$

луч заворачивает и начинает удаляться от ребра клина.

Аналогичная, хотя и более сложная, картина лучей Бриллюэна получается и в клине, лежащем на полупространстве. Картина усложняется эффектом смещения лучей при полном внутреннем отражении на границе $\varphi = \Phi$ в волноводной зоне.

На фиг. 1, *в* показан ход преломленных в полупространство лучей Бриллюэна 1-й и 2-й «плоских» нормальных волн в проекции на плоскость $z = \text{const}$. Уравнение этих проекций лучей Бриллюэна есть

$$y - (x - x_0) \frac{\sqrt{\mu_1^2(r_m) - k_1^2 x_0^2 (1 - n^2)}}{\sqrt{k_1^2 x_0^2 \sin^2\gamma_0 - \mu_1^2(r_m)}} = 0, \quad \mu_1(r_m) = \frac{(2m-1)\pi}{2\Phi},$$

x_0 – расстояние от ребра клина до точки преломления.

Преломленные в полупространство лучи образуют каустическую поверхность. Ее проекция на плоскость $z = \text{const}$ определяется параметрической системой уравнений с параметром x_0:

$$y^2(k_1^2 x_0^2 \sin^2\gamma_0 - \mu_1^2(r_m)) - (x - x_0)^2[\mu^2(r_m) - k_1^2 x_0^2(1 - n^2)] = 0,$$
$$[k_1^2 x_0^2 \sin^2\gamma_0 - \mu_1^2(r_m)][\mu^2(r_m) - k_1^2 x_0^2(1 - n^2)] - (x - x_0)(\cos^2\gamma_0 - -n^2) k_1^2 \mu_1^2(r_m) x_0 = 0.$$

Обычно с каустикой в волновых полях ассоциируется максимум амплитуды, так что траекторию нормальной волны, определенную выше как линию расположения нижнего максимума нормальной волны в клине, естественно продолжить в полупространство по линии каустики, начинающейся в точке $r = r_m$. Линии расположения нижнего максимума профиля нормальной волны в клине определяются уравнением $\varphi = (2m - 1)\pi / 2\mu_1(r)$. В точке $r = r_m$; $\varphi = \Phi$ ее касательная наклонена к линии $\varphi = \Phi$ под углом

$$\alpha \approx \arcsin \Phi. \qquad (7)$$

Касательная к каустике в этой точке совпадает с границей $\varphi = \Phi$, так что определенная таким образом траектория нормальной волны имеет излом в этой точке. У нормальных волн малых порядков, для которых лучевые представления в полупространстве являются более грубым приближением, этот излом, естественно, не должен наблюдаться из-за дифракции. Поэтому для нормальных волн низших порядков угол $\alpha \approx \Phi$ можно считать углом выхода нормальной волны в полупространство в проекции на плоскость $z = \text{const}$, что и наблюдается на экспериментальных картинах, приведенных ниже.

Преломленные в полупространство лучи оказываются ослабленными в различной мере в зависимости от коэффициента прохождения, определяемого углами падения лучей Бриллюэна на границу $\varphi = \Phi$ и кратностью их отраженяи. С учетом всего этого можно показать, что на большом расстоянии от границы максимум «преломленной» нормальной волны имеет место при $\alpha \approx 2\Phi$, так что траекторию нормальной волны в полупространстве можно аппроксимировать отрезком прямой с углом $\alpha = \Phi$ у границы раздела («угол выхода») и лучом $\alpha = 2\Phi$, как показано на фиг. 1, *г*.

Мы ограничились здесь рассмотрением плоской картины, образованной «плоской» нормальной волной, распространяющейся из $r = \infty$ под углом γ_0 к ребру клина.

Использованный здесь метод приближенного рассмотрения описан в работе [2]. Наиболее точное описание волновой картины он дает для нормальных волн высоких порядков, т. е. для больших значений μ. Однако, как показывает эксперимент, вполне удовлетворительное описание получается даже в случае нормальной волны первого порядка, что позволяет сделать вывод об адекватности метода при решении гидроакустической задачи о распространении звука в береговом клине.

Приведем теперь экспериментальные результаты для этого варианта задачи. Эксперимент проводился на установке, описанной в работе [6]. В плоский волновод, образованный поверхностью воды и акустически мягкой поверхностью подвешенной на глубине H горизонтальной площадки с волноотводами по краям, помещалась клиновидная кювета, как показано на фиг. 1, *д*. До уровня H кювета заполнялась жидкостью, скорость звука в которой меньше скорости звука в воде, например, керосином или четыреххлористым углеродом. Одна из боковых стенок кюветы была сделана акустически мягкой и имитировала свободную поверхность $\varphi = 0$; вертикальной плоскости в натуре соответствует горизонтальная плоскость модели. Другая стенка кюветы, соответствующая границе раздела клина и полупространства $\varphi = \Phi$, была сделана звукопроницаемой. Она изготовлялась или из тонкого листа (1 *мм*) оргстекла или из ацетатной пленки (0,2 *мм*); тем, что вместо непосредственного контакта жидкостей на гра-

нице $\varphi \approx \Phi$ имеется промежуточный слой, можно было пренебречь. Дно кюветы устанавливалось в одной плоскости с поверхностью площадки и было также акустически мягким. Вместо неограниченной по координате z модели клина и полупространства мы имели, таким образом, ограниченный по z слой толщиной $\Delta z = H$. Легко показать, что это обстоятельство также не играло существенной роли. В самом деле, решение волнового уравнения в этой задаче получается в разделенном относительно координаты z виде

$$\Psi = \sin(k_1 \cos \gamma_0 z) U(r, \varphi, \gamma_0). \quad (8)$$

Поле в плоскости $z = \text{const}$ описывается функцией $U(r, \varphi, \gamma_0)$, которая не зависит от z. Из фиг. 1, *г* видно, что наша ограниченная по z модель представляет собой область между двумя узловыми плоскостями z_1 и $z_1 + H$ неограниченного по z поля (8), причем

$$\gamma_0 = \pi / k_1 H. \quad (9)$$

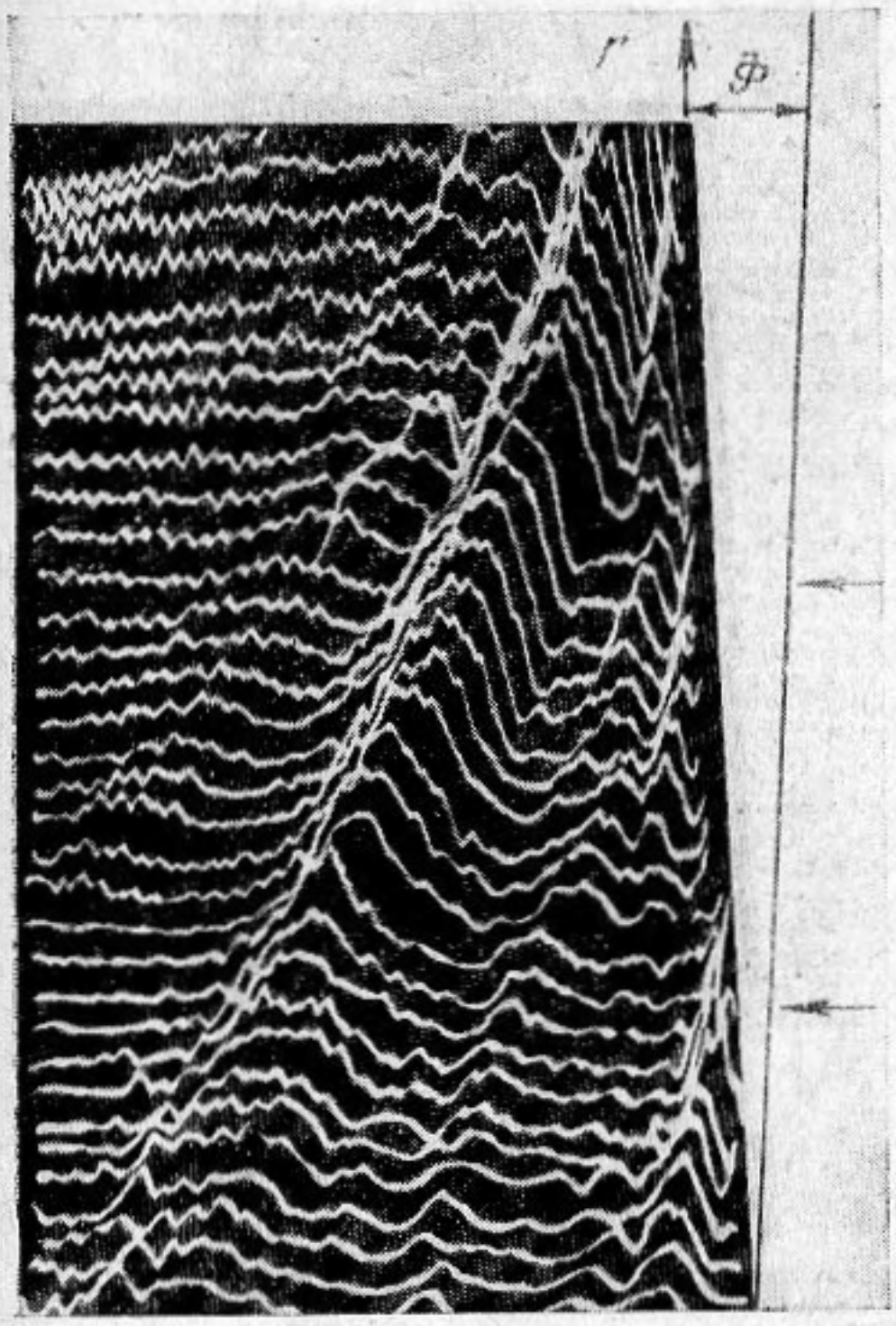
Задавая величину $k_1 H$, мы задаем угол γ_0 (9). Единственное проистекающее отсюда ограничение — это ограничение на углы γ_0, поскольку на ограниченной акустически мягкими поверхностями по z модели нельзя реализовать случай $\gamma_0 = \pi / 2$. Но в этом и нет надобности.

На приведенных на фиг. 2—5 растровых осциллограммах показаны рельефы амплитудной структуры звукового давления. Растры получены путем сканирования поля в плоскости $z = \text{const}$ [6, 7]. На фиг. 2, 3 представлена лишь область полупространства. Область клина с расположенным в нем излучателем дорисована, поскольку стенка кюветы $\varphi = \Phi$ препятствовала сканированию по всей области. Поэтому на этих фигурах не отображена картина профилей нормальных волн в клине.

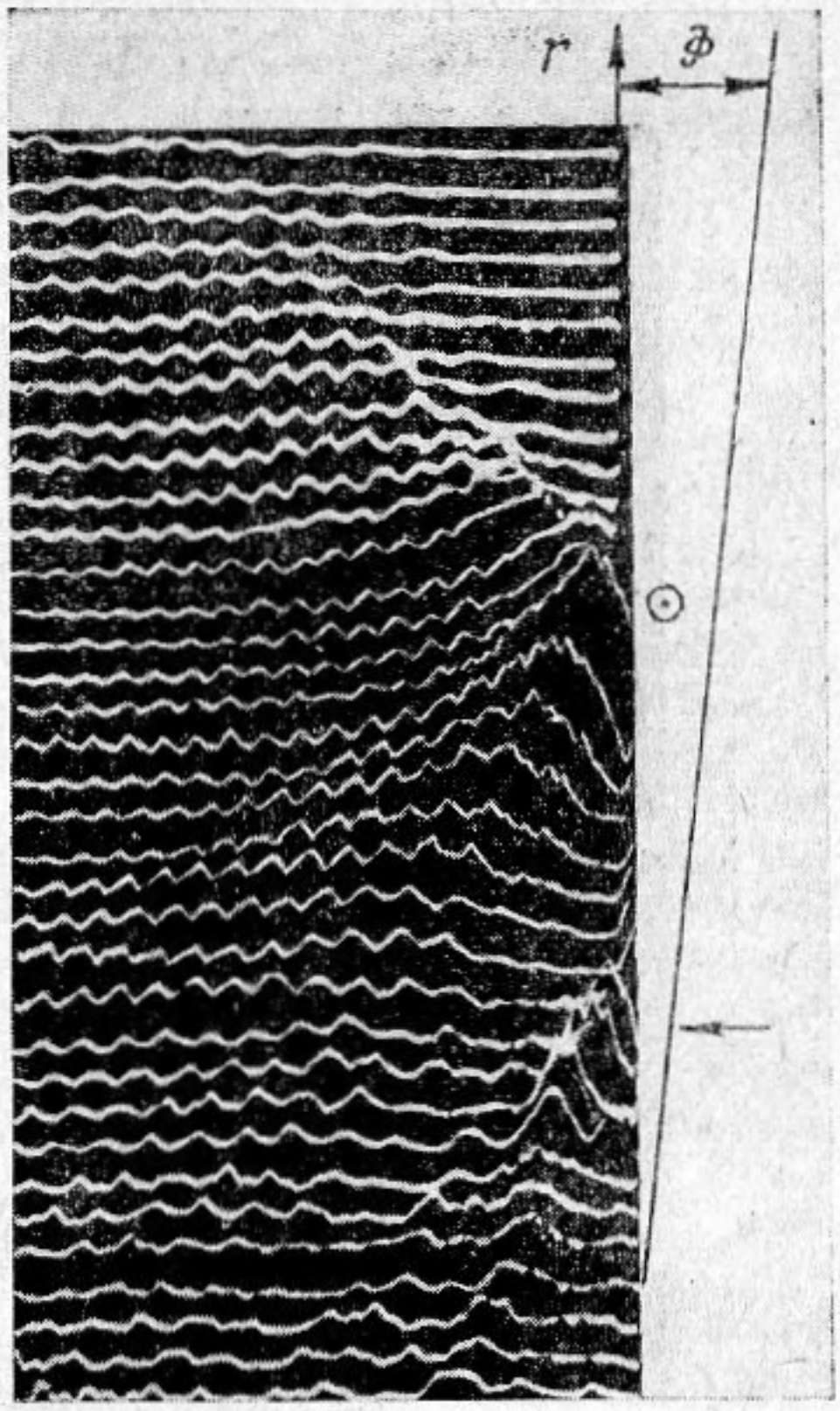
Приведенные на фиг. 4, 5 картины свободны от этого недостатка. На них отображена полная картина выхода нормальных волн в полупространство. Эти картины получены на несколько иной модели: моделью полупространства и здесь является плоский волновод, заполненный водой, но вместо клиновидной кюветы с другой жидкостью была использована клиновидная область, не отгороженная по линии $\varphi = \Phi$, также заполненная водой, но с глубиной $H + \Delta H$, немного большей, чем глубина слоя, моделирующего полупространство. Вследствие разницы в фазовых скоростях нормальных волн (относительно координаты z) получалась аналоговая модель клина, лежащего на полупространстве [7], подобна тому как в работе [8] получалась аналоговая модель плоского слоя, лежащего на полупространстве. Для оценки степени правдоподобности этой модели на фиг. 4, *а* приведена запись волнового поля в хорошо известном случае плоского слоя, лежащего на полупространстве [9]. Фигура 4, *а* представляет «разрез» поля в вертикальной плоскости для новой модели. На ней отображена преломляемая у источника в полупространство волна, зона тени между преломленной волной и границей слоя и профили 1-й нормальной волны в слое. В преломленной волне точками обозначились волновые фронты [7].

Заметим, что, хотя нормальные волны в клине возбуждались сосредоточенным источником, расположенным на конечном расстоянии от ребра клине, из-за ограниченности области по z, поле получалось плоским, вида (8). Непосредственно у излучателя в полупространство выходила преломленная волна, а в клине распространялись нормальные волны. Распространяющиеся в направлении к ребру клина нормальные волны на расстояниях $r = r_m$ выходят из клина в полупространство. Теоретические места выхода их отмечены стрелками. (Кружком обозначено место расположения излучателя.) Нормальные волны, распространяющиеся в противоположном направлении от излучателя, нигде не выходят из клина, и между преломленной у излучателя волной и границей $\varphi = \Phi$ в полупространстве образуется зона тени (см. фиг. 3).

Теоретически определяемые места выхода хорошо совпадают с экспериментальными. Экспериментальные углы выхода, а также траектории



Фиг. 2



Фиг. 3

нормальных волн в общем согласуются с теорией, что можно видеть из фиг. 2–5. На фиг. 2 представлена картина для случая $\Phi = 4°$, $n = 0{,}64$ (четыреххлористый углерод – вода), на фиг. 3 – для $\Phi = 8°$, $n = 0{,}9$ (керосин – вода). Фигуры 4, 5 получены на аналоговых моделях при $\Phi = 4°$.

На фиг. 5, *а* записаны также волновые фронты нормальной волны. Фигура 5, *б* представляет случай, когда выполняется условие (6), и нормальная волна, не доходя до линии выхода $r = r_m$, отражается путем рефракции в сторону $r = \infty$. В полупространстве всюду наблюдается зона тени, а в клине – стоячая волна, образованная прямой и отраженной на линии $r = r_{\text{пов}}$ волнами. Условие (6) в данном случае означает, что глубина H слоя, имитирующего полупространство, является критической для данной частоты, как это следует из соотношения (9) между H и γ_0.

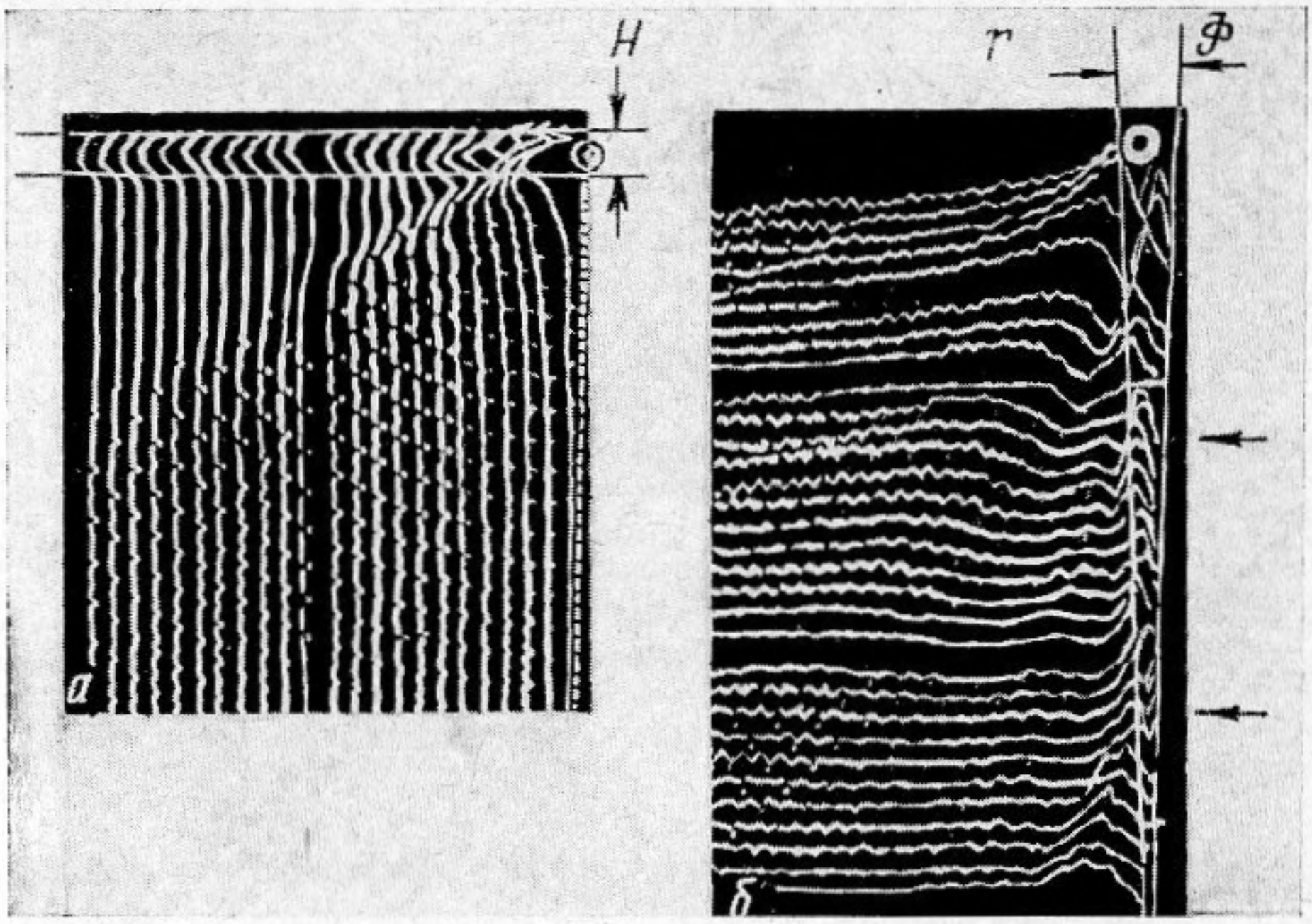
Наряду с преломлением в полупространство в неволноводной зоне имеет место частичное отражение нормальной волны в волноводную зону. Модуль коэффициента отражения определяется следующей формулой: $|V| = \Pi v(\psi_{zj})$

$$v(\psi_{zj}) = \frac{l\cos\psi_{zj}\sin\gamma_0 - \sqrt{n^2 - 1 + \cos^2\psi_{zj}\sin^2\gamma_0}}{l\cos\psi_{zj}\sin\gamma_0 + \sqrt{n^2 - 1 + \cos^2\psi_{zj}\sin^2\gamma_0}}$$

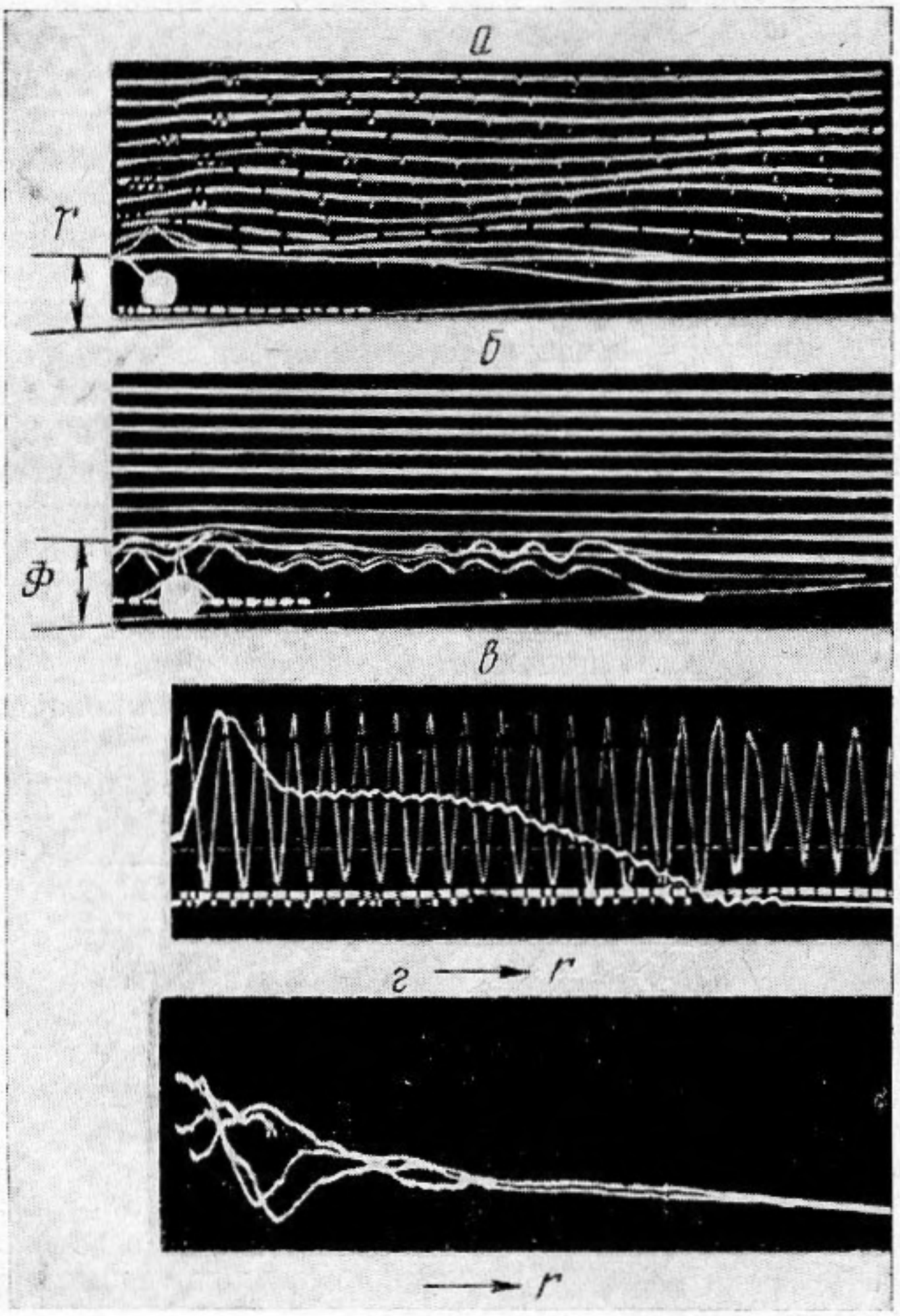
$$\psi_{zj} = \arccos\left[\sqrt{1 - n^2}\,/\,\sin\gamma_0\right] - (2j+1)\,\Phi, \quad j = 1, 2, \ldots, N.$$

$$N = \left\{\arccos\left[\sqrt{1 - n^2}/\sin^2\gamma_0\right]\frac{1}{\Phi}\right\}.$$

Величина в фигурных скобках округляется до целого числа. В случае малых значений угла Φ и не очень малых значений показателя преломления n коэффициент отражения нормальной волны очень мал почти для



Фиг. 4



Фиг. 5

всех углов $\gamma_0 > \arccos n$; только в окрестности угла $\gamma_0 = \arccos n$ он заметно возрастает. При угле $\gamma_0 = \arccos n$, согласно формуле (5), наступает полное отражение нормальной волны вследствие рефракции в волноводной зоне, и, следовательно, коэффициент отражения по модулю становится равным единице. Эти выводы согласуются с нашими экспериментами. На фиг. 5, *в* показана запись амплитуды и фазы звукового давления в клине вдоль границы $\varphi = \Phi$. Монотонное изменение звукового давления (некоторая шероховатость кривой амплитуды обусловлена в основном неидеальностью границ модели) и пилообразная форма фазовой записи говорят об отсутствии заметного отражения. Осциллограмма получена на аналоговой модели при $\Phi = 6°$. Аналогичная осциллограмма (с записью амплитуды по трем трассам без записи фазы), полученная для клина, заполненного керосином, показана на фиг. 5, *г*; здесь $\Phi = 4°$, $n = 0{,}9$ и также не наблюдается отраженной волны. Минимум вблизи излучателя обусловлен интерференцией нормальных волн высших порядков. На фиг. 5, *б*, как уже говорилось, наблюдается стоячая волна в клине. Здесь $\gamma_0 < \arccos n$, т. е. имеет место полное отражение нормальной волны вследствие рефракции в волноводной зоне.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. К. Кузнецов, В. Ж. Низамов. Экспериментальное исследование распространения звука в клине, лежащем на полупространстве. Тр. VI Всес. акустич. конф., A IV, 5, 1968.
2. В. К. Кузнецов. Рефракция нормальных волн в клине, лежащем на полупространстве. Вестник МГУ, сер. физич., 1972, 3, 293—300.
3. В. К. Кузнецов. О новом методе решения задачи о звуковом поле в клине. Акустич. ж., 1959, 5, 2, 170—175.
4. В. К. Кузнецов. Рефракция нормальных волн в клине. Вестн. МГУ. Сер. физ., 1967, 4, 14—21.
5. В. К. Кузнецов. Представление волнового поля в клине от точечного источника в виде волн Бриллюэна. Тр. VI Всес. акустич. конф., A IV, 5, 1968.
6. В. К. Кузнецов. Экспериментальная установка для аналогового моделирования волновых полей в неоднородных средах. Акустич. ж., 1966, **12**, 4, 457—462.
7. В. К. Кузнецов. Визуализация стационарных волновых полей методом совмещенной растровой записи. ПТЭ, 1967, 4, 207.
8. Гун Сю Фэнь, В. К. Кузнецов. Об одной модели волноводного слоя, лежащего на полупространстве. Акустич. ж., 1967, **13**, 1, 42—45.
9. Л. М. Бреховский. Волны в слоистых средах. М., Изд-во АН СССР, 1957.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
Физический факультет

Поступила
15 марта 1971 г.