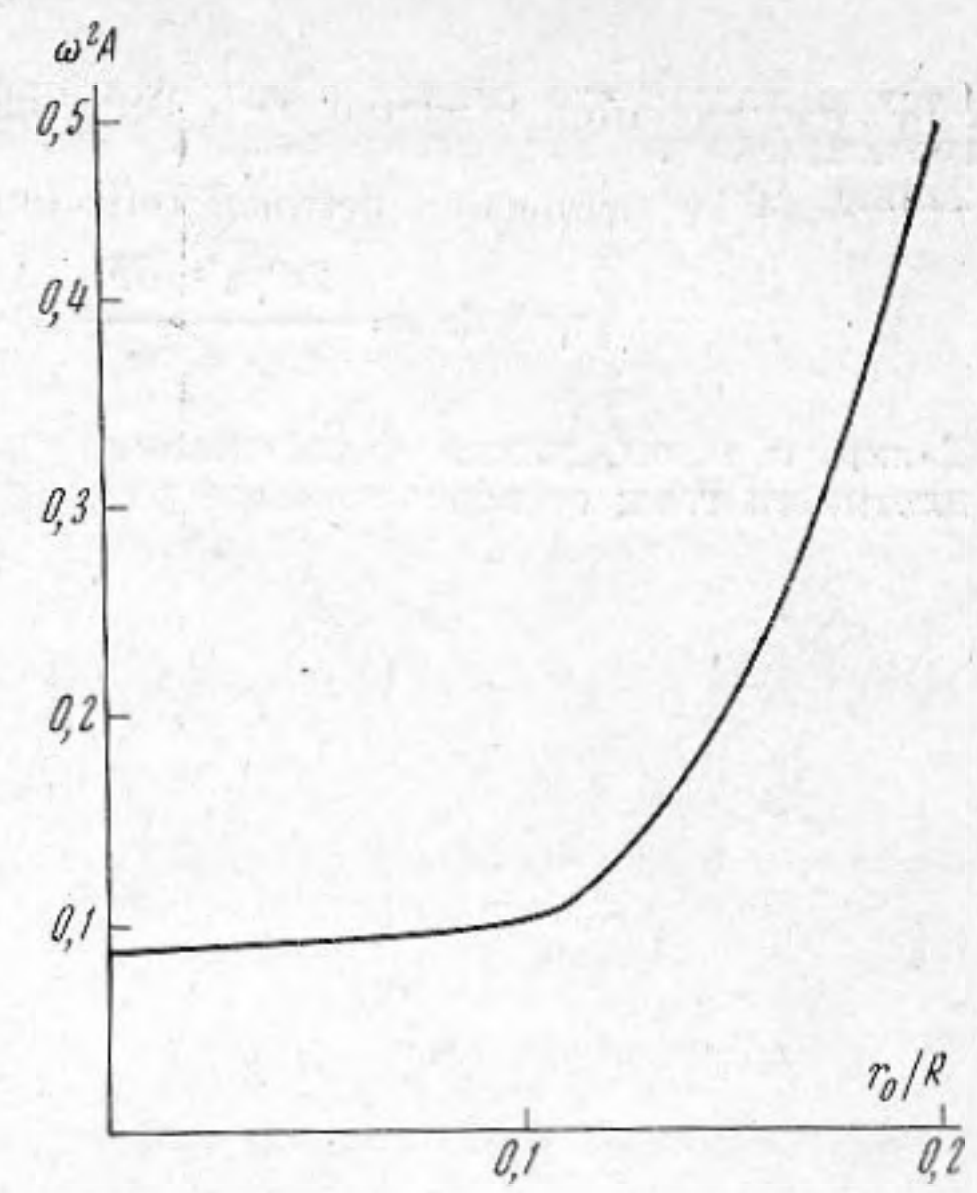
мическое и статическое смещения уменьшаются с ростом кривизны неодинаково. Так для плоской пластины $\left(\frac{r_0}{R}=0\right)$ динамическое резонансное смещение больше статического в $\frac{1}{\eta}=$ $=10$ раз, а для оболочки с относительной кривизной $\frac{r_0}{R}=0{,}2$ динамическое смещение превышает статическое лишь в 4 раза. Отсюда следует, что динамическая жесткость оболочки с увеличением кривизны растет быстрее, чем статическая. На фиг. 2 представлена зависимость безразмерной частоты первого резонанса от кривизны. Резонансная частота с ростом кривизны, как и следовало ожидать, тоже увеличивается.



Фиг. 3

Как известно, для системы с одной степенью свободы произведение амплитуды смещения на резонансе на квадрат резонансной частоты есть величина, не зависящая от жесткости. Зависимость произведения $\omega_{\text{рез}}{}^2 A$ представлена на фиг. 3. До значения $\frac{r_0}{R}=0{,}1$ это произведение остается примерно постоянным, а потом резко увеличивается.

Таким образом, увеличение кривизны сферических сегментаидальных оболочек снижает роль потерь в уменьшении средней амплитуды вибраций на частоте первого резонанса (при заданной силе).

Акустический ин-т АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
10 июня 1971 г.

УДК 534.222.2

ОБ ОБРАЗОВАНИИ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В СТАТИСТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОМ ГАЗЕ

Е. Н. Пелиновский, А. И. Саичев, В. Е. Фридман

В работе [1] исследовались статистические характеристики длины формирования разрыва в волне, возбужденной квазигармоническим сигналом со случайной огибающей. Было показано, что с учетом статистики граничных условий длина формирования в среднем увеличивается. Этот результат получен без учета флуктуаций параметров среды. Ниже рассматриваются статистические характеристики длины формирования ударной волны в среде с крупномасштабными флуктуациями плотности. Показано, что ударная волна в среднем образуется раньше, чем в однородной среде.

Рассмотрим одномерные звуковые волны в покоящемся изотермическом газе. Полагая неоднородность плавной и пренебрегая отраженной волной, легко получить решение уравнений акустики в виде квазипростой волны [2, 3]

$$t-\frac{x}{c}+\frac{(1+\gamma)v}{2c^2}\sqrt{\rho(x)}\int\limits_0^x\frac{dx'}{\sqrt{\rho(x')}}=F(v\sqrt{\rho(x)}). \qquad (1)$$

Здесь c — скорость звука, v — скорость частиц газа, γ — показатель адиабаты, ρ — плотность газа, случайно зависящая от координаты, F — функция, определяемая из граничных условий.

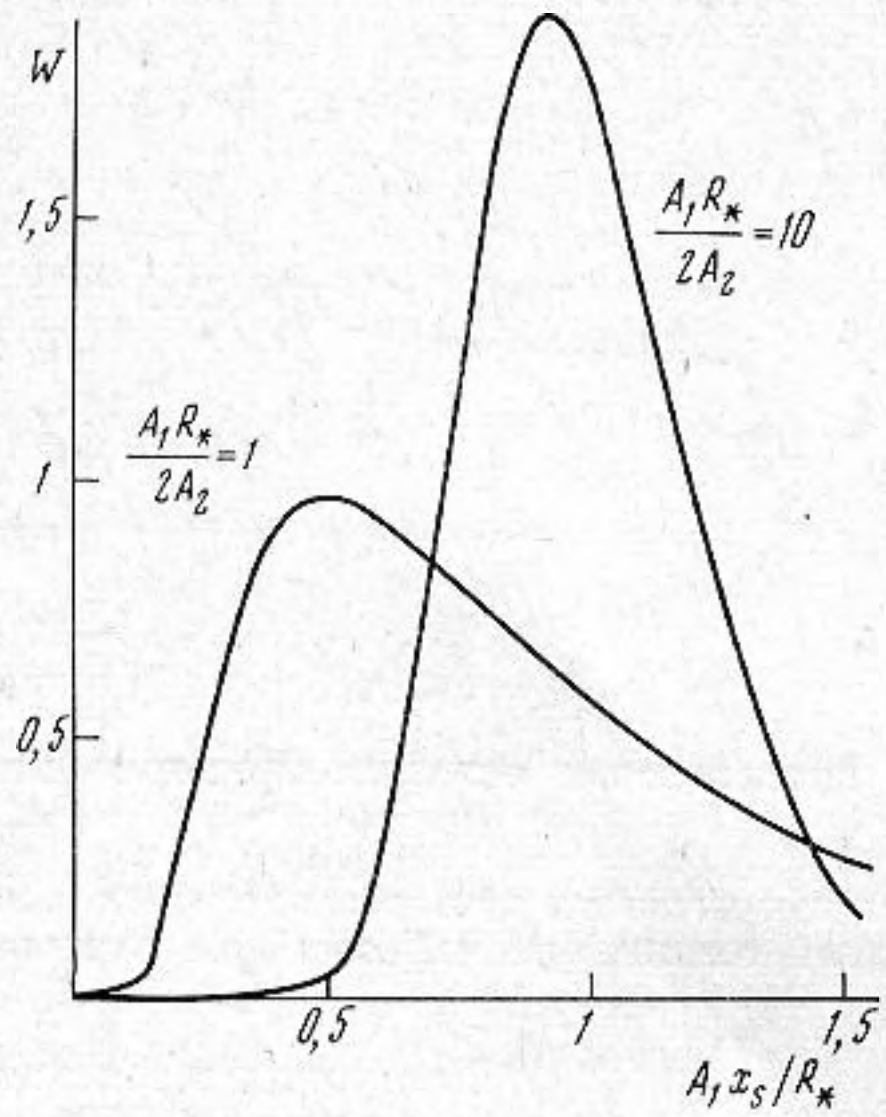
Как известно, решение (1) справедливо до точки x_s, где образуется разрыв. Используя для нахождения x_s обычные условия $\partial t/\partial v=\partial^2 t/\partial v^2=0$, получим

$$\int\limits_0^{x_s}\rho^{-1/2}\,dx=\frac{2c^2}{1+\gamma}\frac{dF}{d\zeta}\Big|_{\substack{x=x_s\\ v=v_s}},\qquad \frac{d^2F}{d\zeta^2}\Big|_{\substack{x=x_s\\ v=v_s}}=0,\qquad \zeta=v\sqrt{\rho}. \qquad (2)$$

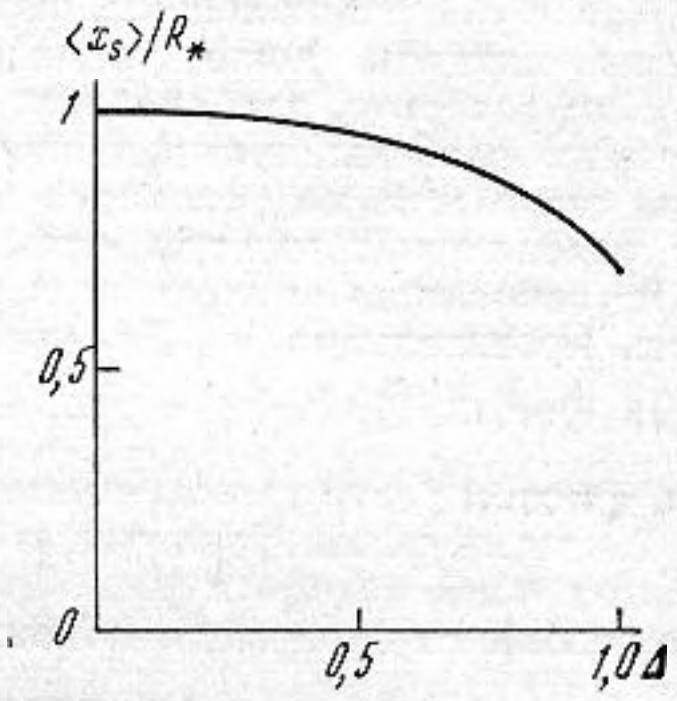
Отсюда видно, что скачок образуется при скорости $v_s = B / \sqrt{\rho(x_s)}$, $B = \text{const}$ (для гармонического начального возмущения $B = 0$) в точке x_s, удовлетворяющей уравнению

$$\int_0^{x_s} \eta^{-1/2}\, dx = \frac{2c^2\rho_0^{1/2}}{1+\gamma}\frac{dF}{d\zeta}(B) = R_* = \text{const}; \qquad \eta = \rho/\rho_0. \tag{3}$$

Таким образом, длина формирования ударной волны является функционалом от плотности газа; ее вероятностное распределение можно найти лишь для марковских процессов [4]. Подынтегральную функцию в формуле (3) можно считать марковской, если ее длина корреляции l мала по сравнению с длиной формирования разрыва $\sim R_*$ (это условие не выполняется лишь для больших амплитуд) *. Тогда плотность вероятности $W(x_s)$, согласно работе [4], есть $W(x_s) =$



Фиг. 1



Фиг. 2

$= -\partial Q / \partial x(x_s, 0)$, где $Q(x, y)$ является решением первого уравнения Колмогорова:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = A_1\frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{1}{2}A_2\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} \tag{4}$$

с граничным и начальными условиями $Q(x, R_*) = 0$, $Q(x, -\infty) = 1$, $Q(0, y) = 1$, где A_1 и A_2 выражаются через статистические характеристики плотности: $A_1 = \langle\eta^{-1/2}\rangle$, $A_2 = l\sigma$ (σ — дисперсия $\eta^{-1/2}$). Для однородной среды (A_1, A_2 — постоянные) легко получить

$$W(x_s) = \frac{R_*}{\sqrt{2\pi A_2 x_s^{3/2}}}\exp\frac{-(A_1x_s - R_*)^2}{2A_2x_s}. \tag{5}$$

График $W(x_s)$ представлен на фиг. 1. Используя выражение (5), можно найти все моменты x_s. В частности, среднее значение x_s и его дисперсия равны

$$\langle x_s\rangle = R^*/\langle\eta^{-1/2}\rangle, \qquad \sigma_{x_s} = \frac{\sigma}{\langle\eta^{-1/2}\rangle^3}\frac{l}{R_*}. \tag{6}$$

Отсюда видно, что $\langle x_s\rangle$, вообще говоря, отличается от R_*. При симметричном распределении плотности средняя длина, на которой формируется разрыв, меньше, чем в отсутствие флуктуаций **. Это связано с более быстрым увеличением крутизны фронта волны на участках с $\rho < \rho_0$.

В качестве конкретного примера рассмотрим распределение ρ с плотностью вероятности $W(\eta)$:

$$W(\eta) = \begin{cases} {}^1/_2\Delta, & \text{если} \quad |\eta - 1| < \Delta < 1 \\ 0, & \text{если} \quad |\eta - 1| > \Delta \end{cases}. \tag{7}$$

---

* С другой стороны, l велико по сравнению с длиной волны (плавная неоднородность).

** Аналогичное сокращение длины формирования разрыва имеет место для волн на поверхности неглубокой жидкости [5].

Вычисляя $\langle \eta^{-1/2} \rangle$, получим

$$\frac{\langle x_s \rangle}{R_*} = \frac{\Delta}{\sqrt{1+\Delta} - \sqrt{1-\Delta}} \tag{8}$$

На фиг. 2 представлена зависимость $\langle x_s \rangle$ от величины неоднородности Δ. При большом разбросе плотности газа $\langle x_s \rangle$ меньше R_* примерно на 30%. Существенно и то, что при малых флуктуациях координата образования скачка отличается от R_* на много длин волн.

В заключении отметим возможность применения полученных результатов в астрофизике, например для учета турбулентности хромосферы при прохождении нелинейных волн в атмосфере Солнца [3].

Авторы благодарны С. А. Каплану и Л. А. Островскому за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Н. Пелиновский, В. Е. Фридман. О статистических явлениях при образовании ударных волн. Акуст. журнал, 18, 4, 590.
2. Л. А. Островский. К теории волн в нестационарных сжимаемых средах. ПМН, 1963, 27, 5, 924—929.
3. С. А. Каплан, Л. А. Островский. К теории образования ударных волн в хромосфере и короне. Солнечные данные 1963, 6, 53—54.
4. А. А. Свешников. Прикладные методы теории случайных функций, Наука, М., 1968.
5. Е. Н. Пелиновский. О распространении поверхностной волны конечной амплитуды при учете статистических неровностей дна. Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 1971, 7, 11.

НИРФИ
Горький

Поступила в редакцию
4 октября 1971 г.

УДК 534.26

О СВЯЗИ МЕЖДУ ДАВЛЕНИЕМ И ЕГО ГРАДИЕНТОМ НА КОЛЕБЛЮЩЕЙСЯ ПОВЕРХНОСТИ

А. В. Римский-Корсаков, И. Е. Цукерников

В последние годы, благодаря интенсивному развитию и широкому применению ЭВМ, для расчета звукового поля, создаваемого телом конечной длины и произвольной формы, большое значение приобретают методы, основанные на классическом интеграле Гельмгольца, который связывает давление $P(\mathbf{r})$ в любой точке поля $\mathbf{r}$ с распределением давления и его градиента $\frac{\partial}{\partial n} P(\mathbf{r})$ на поверхности колеблющегося тела. Для гармонической зависимости от времени интеграл Гельмгольца имеет вид:

$$P(\mathbf{r}) = \int_S \left[P(\mathbf{r}_0) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) - \frac{\partial P(\mathbf{r}_0)}{\partial n} \frac{e^{ikR}}{R} \right] dS, \tag{1}$$

где $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$, $\mathbf{r}_0$ — точка на поверхности колеблющегося тела S и n — нормаль к этой поверхности в точке $\mathbf{r}_0$.

Однако практически никогда не известны распределения давления и его градиента на колеблющейся поверхности одновременно, а экспериментальное определение обеих величин оказывается в большинстве случаев громоздким и неточным. В связи с этим были разработаны методы [1—3], позволяющие определить одну из этих величин по известным значениям другой. Эти методы приводят к решению интегрального уравнения для неизвестной величины.

В первом из них [1] связь между поверхностным давлением и его градиентом дается в виде сингулярного интегрального уравнения

$$P(\mathbf{r}_0') = 1/2\pi \int_S P(\mathbf{r}_0) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikR'}}{R'} \right) dS - 1/2\pi \int_S \frac{\partial P(\mathbf{r}_0)}{\partial n} \frac{e^{ikR'}}{R'} dS, \tag{2}$$

где $R' = |\mathbf{r}_0' - \mathbf{r}_0|$ — расстояние между двумя точками поверхности S. Это уравнение получается из выражения (1) при помещении точки поля $\mathbf{r}$ на колеблющуюся поверхность $S(\mathbf{r} \to \mathbf{r}_0)$.