АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XVIII 1972 Вып. 3

УДК 534.222.2

ВЛИЯНИЕ ФАЗОВЫХ СДВИГОВ ПРИ ОТРАЖЕНИИ ОТ ГРАНИЦ НА НЕЛИНЕЙНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

Л. К. Зарембо, О. Ю. Сердобольская, И. П. Чернобай

Исследовано влияние частотно-зависимых импеданцев на концах образца на результат нелинейного взаимодействия продольных волн в кристалле калий-дигидрогенфосфата. Исследовалась волна суммарной частоты в диапазоне нескольких десятков мегагерц. Теоретически и экспериментально показано, что при некоторых условиях можно получить нарастающий эффект. Определены нелинейные параметры калийдигидрогенфосфата для продольных волн по осям x и z.

Распространение звуковой волны конечной амплитуды в нелинейной упругой среде, как известно, сопровождается возникновением нарастающих в пространстве гармоник. Для диссипативной среды без дисперсии вторая гармоника растет линейно с расстоянием от излучателя; можно сказать то же самое и о волне суммарной (или разностной) частоты в случае, если первоначально существуют две волны с частотами ω_1 и ω_2. Учет поглощения приводит к тому, что волна суммарной частоты растет линейно только вблизи излучателя, затем достигает максимума на расстоянии стабилизации и, наконец, убывает.

В среде без дисперсии фазовые соотношения между объемной силой, вызывающей появление волны суммарной частоты $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$, и колебательной скоростью или смещением в этой волне остаются без изменения в течение всего времени распространения, что приводит к нарастающим эффектам. При наличии дисперсии изменение амплитуды волны суммарной частоты имеет характер пространственных биений, что обусловливается накапливающимся по мере распространения фазовым сдвигом волны ω_3 по отношению к волнам ω_1 и ω_2. Чем больше дисперсия, тем меньше период биений. Так, например, поперечная волна может сопровождаться появлением продольной второй гармоники, однако период биений последней имеет порядок длины волны, и никакого нарастания не происходит.

При акустических измерениях на твердом теле часто приходится иметь дело с образцами, размеры которых много меньше расстояния стабилизации. При отражении продольной волны от концов образца возникают дополнительные сдвиги фаз между первичными и вторичными волнами, что приводит к тому, что в серии эхо-импульсов наблюдаются точно такие же биения, как это было при наличии дисперсии в среде. Можно сказать, что дисперсия теперь локализована на границах [1].

Вопрос об отражении волн конечной амплитуды неоднократно обсуждался в литературе. Для генерации второй гармоники было показано экспериментально [2], что после отражения от свободной поверхности вместо дальнейшего нарастания амплитуда гармоники на пути к генерирующему торцу убывает до нуля. В работе [3] исследовалась трансформация волны конечной амплитуды при отражении от границы двух сред и было получено выражение для формы волны при любом коэффициенте отражения.

Карр в работе [4] рассчитал амплитуды отраженных звуковых импульсов второй гармоники с учетом фазовых сдвигов, вносимых преобразователями звука.

Рассмотрим плоскую продольную волну, распространяющуюся вдоль оси [100] кристалла. Волновое уравнение для смещения u с учетом членов второго порядка записывается в виде

$$\rho u_{tt} - c_{11} u_{xx} = (3c_{11} + C_{111}) u_x u_{xx}. \tag{1}$$

Здесь ρ — плотность среды и c_{11}, C_{111} упругие модули второго и третьего порядка соответственно.

В общем случае граничное условие имеет вид

$$u|_{x=0} = A[1 - \cos(\omega_1 t + \varphi_1)] + B[1 - \cos(\omega_2 t + \varphi_2)] + \\ + D[1 - \cos(\omega_3 t + \varphi_3)], \tag{2}$$

где φ_1, φ_2, φ_3 — начальные фазы колебаний соответствующих частот. Следует учесть, что амплитуда волны суммарной частоты остается малой по сравнению с амплитудами основных волн, т. е. $D \ll A$, B.

Уравнение (1) решается методом последовательных приближений [5]. Решения для первого и второго приближений, соответственно будут

$$u' = A[1 - \cos(\omega_1 t - k_1 x + \varphi_1)] + \\ + B[1 - \cos(\omega_2 t - k_2 x + \varphi_2)]. \tag{3}$$

и

$$u'' = D[1 - \cos(\omega_3 t - k_3 x + \varphi_3)] - \\ - \frac{\Gamma}{4} ABk_1 k_2 x[1 - \cos(\omega_3 t - k_3 x + \varphi_1 + \varphi_2)]. \tag{4}$$

Здесь k_1 и k_2 — волновые числа для частот ω_1 и ω_2 $k_3 = k_1 + k_2$ и $\Gamma = 3 + \frac{C_{11}}{C_{11}}$.

Для большинства твердых тел $C_{111} < 0$ и $\left.\frac{C_{111}}{C_{11}}\right| > 3$, поэтому $\Gamma < 0$. Таким образом, если начальные фазы исходных волн равны φ_1 и φ_2 то волна суммарной частоты имеет начальную фазу $\varphi_1 + \varphi_2$. При этом считается, что $D = 0$, и комбинационная волна возникает только в объеме тела.

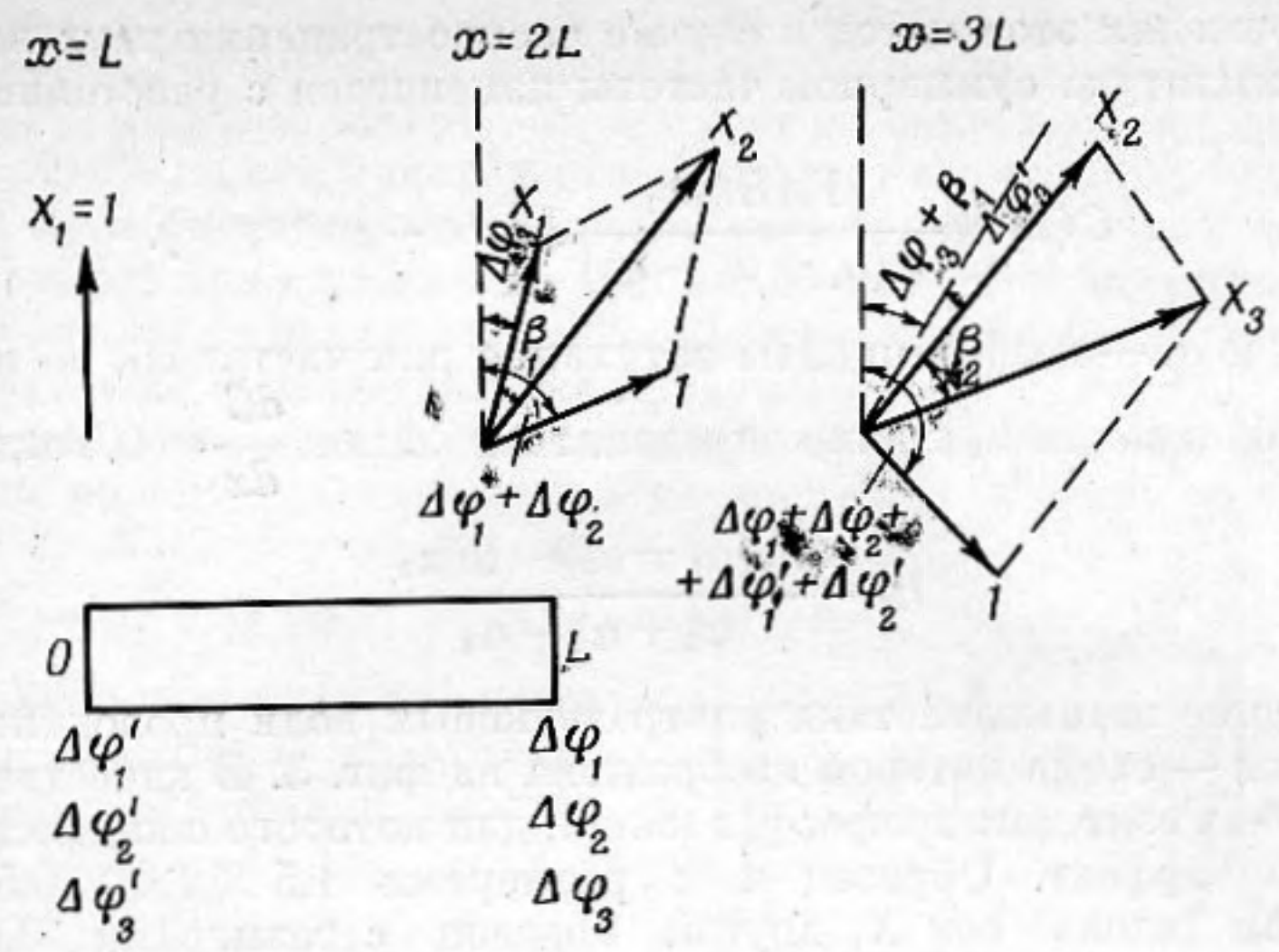
Перейдем к процессу накопления сигнала суммарной частоты для бегущих волн в слое длины L с произвольными импеданцами (реактивными) на концах. В точках $x = L$, $2L$, ... происходит скачкообразное изменение фазы на величину $\Delta\varphi$. При распространении волны от $x = 0$ до $x = L$ амплитуда суммарной частоты линейно нарастает и при $x = L$ становится равной

$$u''|_{x=L} = -\frac{\Gamma}{4} ABk_1 k_2 L[1 - \cos(\omega_3 t - k_3 L + \varphi_1 + \varphi_2)]. \tag{5}$$

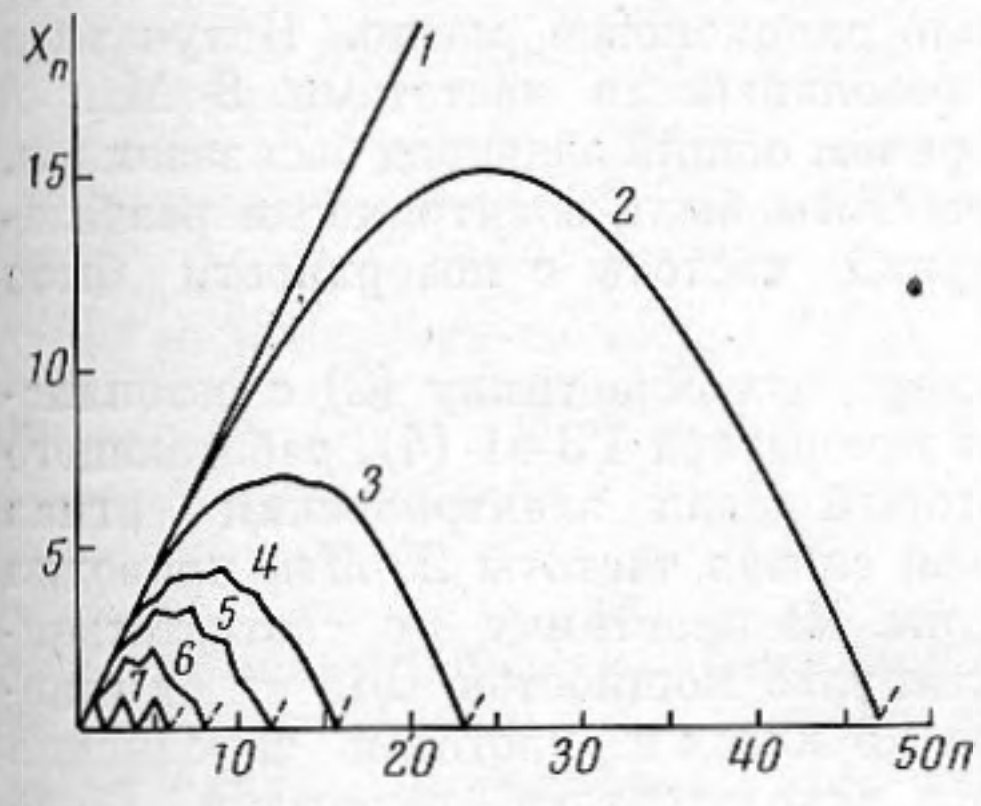
Сразу после отражения фаза волны ω_3 изменяется на угол $\Delta\varphi_3$ в то время как потери фаз исходных волн при отражении $\Delta\varphi_1$ и $\Delta\varphi_2$. Теперь, используя выражение (4), где D и φ_3 определяются формулой (5), с учетом потери фазы при отражении, для переменной составляющей мы получаем при $x = 2L$ следующее выражение:

$$u''|_{x=2L} = \frac{\Gamma}{4} ABk_1 k_2 L[\cos(\omega_3 t - 2k_3 L + \varphi_1 + \varphi_2 - \Delta\varphi_3) + \\ + \cos(\omega_3 t - 2k_3 L + \varphi_1 + \varphi_2 - \Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2)] \tag{6}$$

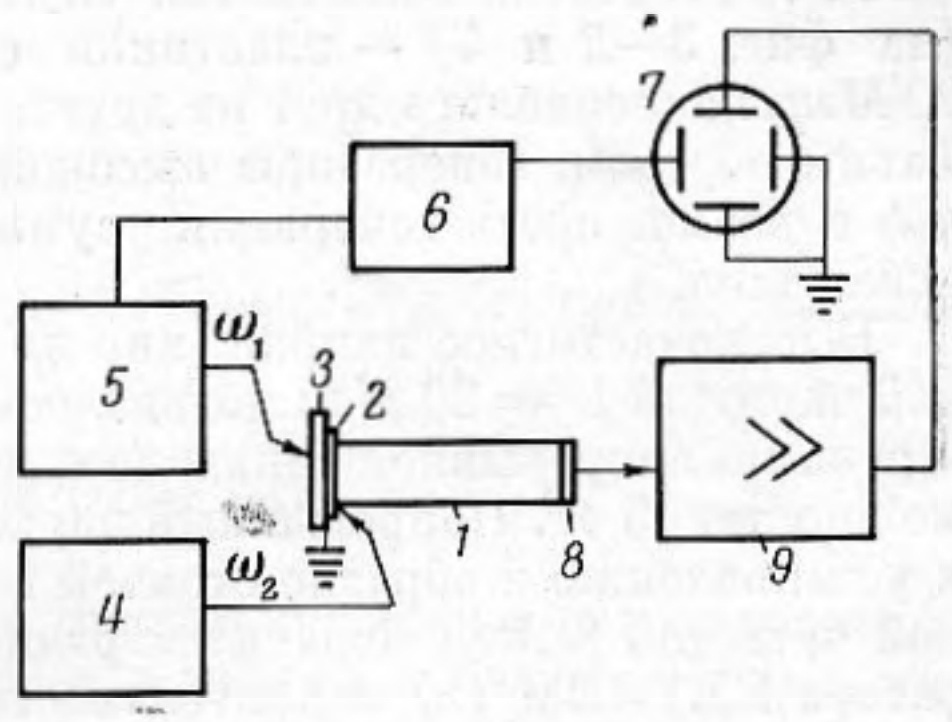
Если соотношение фаз в выражении (6) таково, что $\Delta\theta = \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 - \Delta\varphi_3 = 0$, то $u''|_{x=2L}$ увеличится в два раза по сравнению с концом $x = L$, если $\Delta\theta = \pi$ амплитуда волны суммарной частоты в точках $x = 2L$, $4L$,... равна нулю.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

На фиг. 1 представлены векторные диаграммы для волны суммарной частоты в точках L, $2L$, $3L$. Амплитуда X_n (в единицах $\frac{\Gamma}{4}ABk_1k_2L$) и фаза $\Delta\theta_n$ перед n-ым отражением определяются выражениями

$$X_n = (X_{n-1}^2 + 1 + 2X_{n-1}\cos\Delta\theta_n)^{1/2},$$

$$\Delta\theta_n = \left[\frac{n}{2}\right](\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 - \Delta\varphi_3) + \left[\frac{n-1}{2}\right](\Delta\varphi_1' + \Delta\varphi_2' - \Delta_3') - \sum_{k=1}^{n-1}\beta_k,$$

$$\sin\beta_n = \sin\Delta\theta_n / X_n \qquad (7)$$

Здесь $\Delta\varphi_1'$, $\Delta\varphi_2'$, $\Delta\varphi_3'$ — сдвиги фаз при отражении от границы $x = 0$ для частот ω_1, ω_2, ω_3 соответственно.

На фиг. 2 приведены графики зависимости $X_n(n)$ для случая, когда $\Delta\theta' = \Delta\varphi_1' + \Delta\varphi_2' - \Delta\varphi_3' = 0$. Кривые рассчитаны для следующих значений $\Delta\theta = \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 - \Delta\varphi_3$: $I = 0°$, 2—15°, 3—30°, 4—45°, 5—60°, 6—90°, 7—180°.

Учет диссипативных потерь приводит, конечно, к затуханию волны суммарной частоты на больших расстояниях от излучателя, однако и в этом случае наблюдается картина пространственных биений.

Решение задачи с учетом затухания приводится, например, в работе [6], где использован метод укороченных уравнений для генерации второй гар-

моники. Применяя этот метод в случае распространения двух волн, получаем, что амплитуда суммарной частоты изменяется с расстоянием по закону

$$C(x)=\frac{\Gamma ABk_1k_2}{4(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)}[e^{-\alpha_3 x}-e^{-(\alpha_1+\alpha_2)x}]. \qquad (8)$$

Здесь α_1, α_2 и α_3 — коэффициенты затухания для частот ω_1, ω_2 и ω_3. Расстояние стабилизации $l_{ст}$ можно определить, полагая $\frac{dC}{dx}=0$. Тогда

$$l_{ст}=\frac{\ln(\alpha_1+\alpha_2)-\ln\alpha_3}{\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3} \qquad (9)$$

Наблюдение взаимодействия ультразвуковых волн проводилось на установке, блок — схема которой изображена на фиг. 3. В качестве материала образца был взят дигидрофосфат калия, для которого ожидался большой нелинейный эффект. Образец 1 с размерами $1{,}5\times1{,}0\times0{,}5$ *см*³ был ориентирован вдоль оси X, другой образец с размерами $3{,}0\times1{,}0\times\times0{,}5$ *см*³ — вдоль оси Z. В качестве преобразователей звука использовались полуволновые кварцевые пластинки X-среза с напыленными электродами, акустическим контактом служило силиконовое масло. Излучатели (на фиг. 3—*2* и *3*) — пластинки с резонансными частотами 8 Мгц и 20 *Мгц*, наклеивались друг на друга, причем общий электрод был заземлен. Таким образом, генераторы высокой частоты были электрически развязаны, и возможность генерации суммарной частоты с поверхности была исключена.

Высокочастотное напряжение на кварцевую пластинку (2) с резонансной частотой $f_2=20$ *Мгц* подавалось с генератора ГЗ-41 (4), работающего в режиме непрерывной генерации, который давал электрический сигнал мощностью 5 *вт*. Непрерывный звуковой сигнал частоты 20 *Мгц* приводил к установлению в образце стоячей волны. На пластинку 3 с соответственной частотой 8 *Мгц* подавался радиоимпульс мощностью 0,15 *вт* от генератора ПКГ-IВМ (5) с длительностью 1,5 *мксек* и частотой заполнения $f_1=8$ *Мгц*. В качестве синхронизатора использовался генератор Г5-15 (6), вырабатывающий импульсы запуска для ПКГ-IВМ с амплитудой порядка 100 в и импульсы запуска для ждущей развертки осциллографа (7).

Поскольку длительность импульса $\tau<\frac{L}{c}$, где c — скорость звука в образце, волна суммарной частоты тоже должна существовать в виде импульсов длительностью τ. На приемной кварцевой пластинке (8) с резонансной частотой 30 *Мгц* принималась серия эхо-импульсов частоты 28 *Мгц*, затем радиоимпульсы усиливались приемником П5-I (9), детектировались и подавались на осциллограф.

Следует отметить, что колинеарное взаимодействие для продольных волн возможно лишь в том случае, когда их волновые векторы совпадают по направлению. Так как стоячая волна может быть представлена в виде суммы двух бегущих, то при распространении импульса от излучателя к приемнику происходит взаимодействие с волной, бегущей слева направо (см. фиг. 3), а после отражения — с волной, бегущей справа налево.

Как следует из выражения (5), амплитуда волны суммарной частоты пропорциональна произведению амплитуд взаимодействующих волн. Величина звукового импульса зависит от мощности, подводимой к преобразователю и коэффициента преобразования излучателя, тогда как амплитуда стоячей волны зависит еще и от того, насколько частота стоячей волны близка к одной из собственных частот образца. И подводимая мощность, и коэффициент преобразования на частоте ω_2 при малых расстройках относительно резонансной частоты излучателя практически не изменяются,

поэтому при изменении частоты непрерывного сигнала зависимость амплитуды волны суммарной частоты от ω_2 имеет резонансный вид, как показано на фиг. 4. Здесь по оси ординат отложена в относительных единицах амплитуда А первого звукового импульса частоты 28 *Мгц*, для которого нет фазовых сдвигов при отражении. Как видно из фиг. 4, величина резонансных пиков медленно изменяется в соответствии с частотной характеристикой излучателя 20 *Мгц* (штриховая кривая).

Рассмотрим подробнее фазовые сдвиги, происходящие на торцах образца. Первый конец нагружен на полуволновую пластинку с резонансной частотой 30 *Мгц*. Импеданц ее

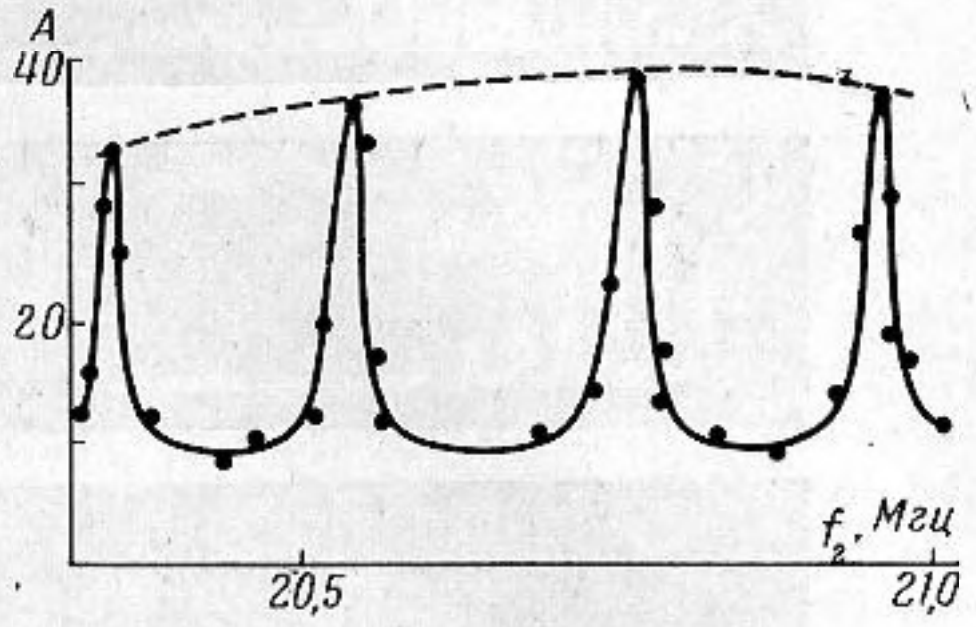
$$Z_L = j\rho' c' \operatorname{tg} kd, \qquad (10)$$

где $\rho' c'$ — волновое сопротивление кварца, d — толщина пластинки. Коэффициент отражения можно написать в виде

$$r = \frac{Z_L - \rho c}{Z_L + \rho c} = |r| e^{j\Delta\varphi} \qquad (11)$$

Пренебрегая акустическими потерями в пластинке, получаем $|r| = 1$ и

$$\operatorname{tg} \Delta\varphi = \frac{2\rho' c' \rho c \operatorname{tg} kd}{(\rho' c' \operatorname{tg} kd)^2 - (\rho c)^2}. \qquad (12)$$



Фиг. 4

Если подобрать частоты ω_1 и ω_2 таким образом, чтобы при отражении от импеданса Z_L выполнялось условие

$$\Delta\theta = \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 - \Delta\varphi_3 = 0, \qquad (13)$$

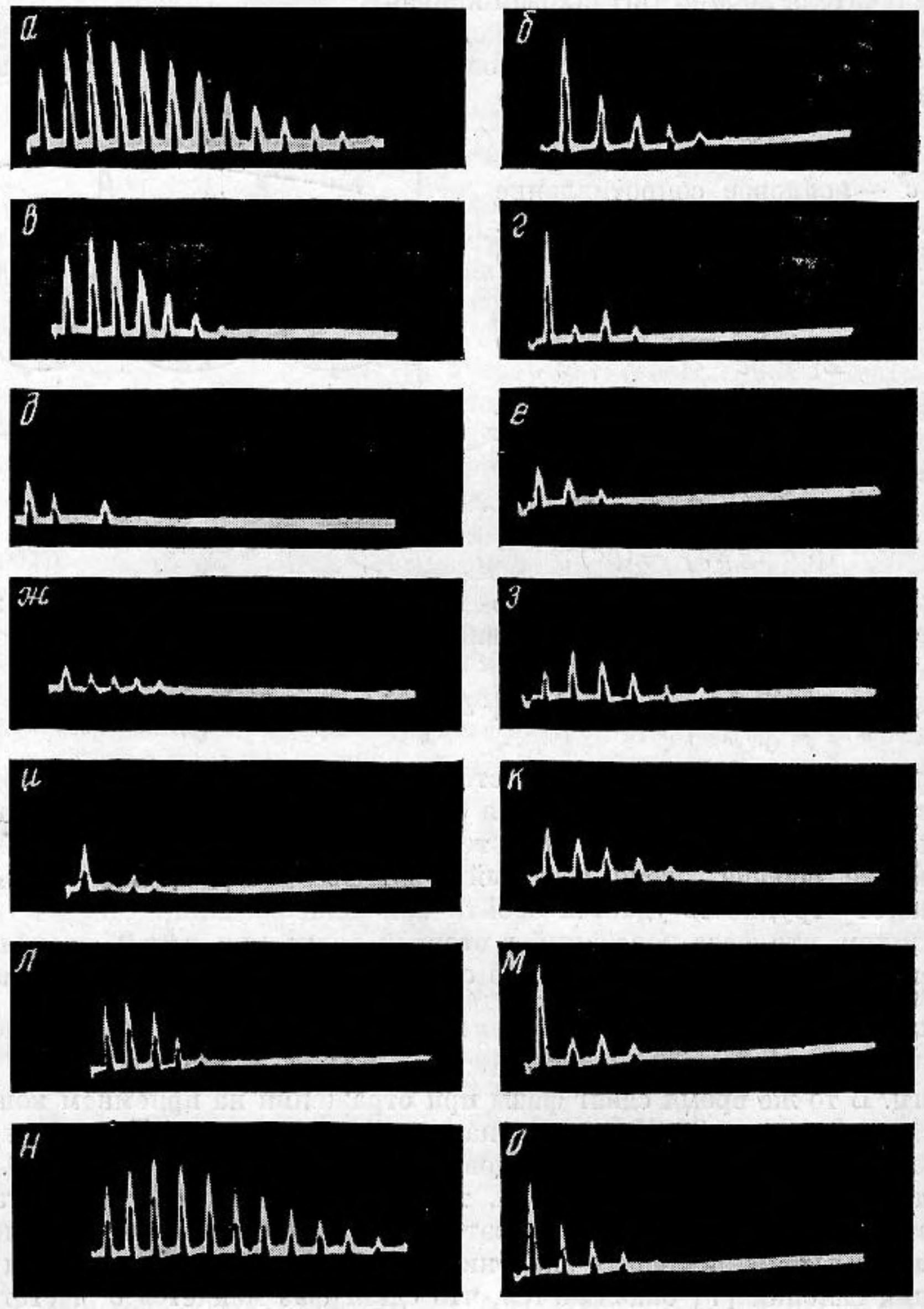
то отражение волны суммарной частоты происходит также, как от абсолютно жесткой границы без изменения фазы, и должна наблюдаться нарастающая серия эхо-импульсов. При тех же значениях частот на излучающем конце, вообще говоря, фазовый сдвиг $\Delta\theta' = \Delta\varphi_1' + \Delta\varphi_2' - \Delta\varphi_3' \neq 0$. Однако эту трудность удается обойти при использовании стоячей волны. Дело в том, что фаза колебаний в стоячей волне при $x = 0$ проходит все значения от 0 до π (следовательно сдвиг фазы — от 0 до 2π) при изменении частоты на величину $\frac{c}{2L}$, которая в эксперименте была порядка 100 кгц. В то же время сдвиг фазы при отражении на приемном конце меняется на 2π через 30 *Мгц*, т. е. значительно медленнее. Благодаря этому всегда можно найти частоту ω_2, удовлетворяющую условию $\Delta\theta' = 0$.

Что касается приемного конца, то частотная зависимость сдвига фаз при отражении почти линейна, поэтому в идеальном случае условие (13) не выполняется при любых значениях частот ω_1 и ω_2. Однако при учете влияния склейки [7] оказывается, что сдвиг фаз меняется с частотой нелинейно, испытывая резкий скачок в районе резонансной пластинки, что позволяет в некоторых случаях подобрать ω_2 (частота ω_1 в эксперименте была фиксирована) так, чтобы выполнялось условие (13).

Если теперь медленно изменять ω_2, а следовательно, $\Delta\theta'$ на излучающем конце, то серия эхо-импульсов меняет свой вид. При некотором значении частоты можно получить нарастающую серию, определяемую формулой (8), которая дана без учета сдвига фаз при отражении, затем, изменяя частоту, можно получить картину биений, что соответствует промежуточным значения угла $\Delta\theta'$, и, наконец, при $\Delta\theta' = \pi$ — импульсы суммарной частоты должны гасить друг друга при $x = 0$ и иметь постоянную амплитуду при $x = L$, что на фиг. 2 соответствует нечетным номерам отражений. При

учете затухания такая серия должна экспоненциально спадать. Затем снова начинаются биения, и через $\Delta\omega_2 = \frac{c}{2L}$ вся картина повторяется.

На фиг. 5 (*а-ж*) представлены осциллограммы серии эхо — импульсов суммарной частоты 31 *Мгц* ($f_1 = 8$ *Мгц*, $f_2 = 23$ *Мгц*). Осциллограммы



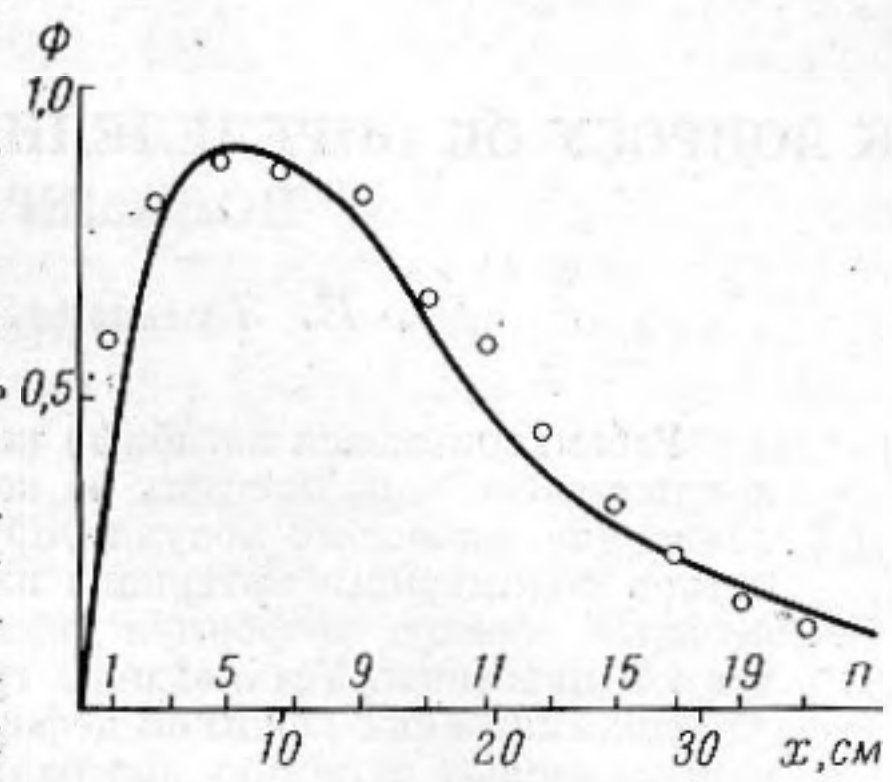
Фиг. 5

сняты с интервалом $\Delta\omega_2 \sim 15$ *кгц*. В этом случае удалось получить нарастающую серию. Поскольку число импульсов невелико из-за большого затухания в образце, условия (13) может выполняться не очень строго и допускает сдвиг фаз $\Delta\theta \pm 30°$. Для образцов с меньшим затуханием чисто нарастающих серий получить не удавалось поскольку выбор частоты ω_2 был ограничен резонансной характеристикой излучателя, а толщина склейки не могла быть изменена.

Как видно, из осциллограмм на фиг. 5 (*а-ж*), при частоте 31 *Мгц* вид серии при изменении ω_2 изменялся описанным выше образом. Следует

только отметить, что амплитуды всех импульсов увеличивались при резонансе образца. Для другой частоты $f_2 = 20$ *Мгц* максимальная амплитуда соответствовала фазовому сдвигу $\Delta\theta \sim 120°$ (фиг. 5 *з-о*). При изменении частоты наблюдались биения, нарастающая серия и снова первоначальная картина.

Проведенный эксперимент с использованием как непрерывной, так и импульсной генерации звука с образованием волны суммарной частоты позволяет более подробно исследовать влияние фазовых сдвигов, происходящих при отражении волн конечной амплитуды, и при подборе импеданцев на приемном конце получить условия, близкие к условиям механически зажатых концов, что максимально увеличивает конечный эффект нелинейного взаимодействия волн. Приведенные выше результаты позволяют объяснить возникновение нарастающих серий второй гармоники, полученных в работе [8].



Фиг. 6

На фиг. 6 представлена теоретическая зависимость сигнала суммарной частоты от расстояния x и номера отражения n в образце X-среза, рассчитанная по формуле (8) в сопоставлении со значениями амплитуд эхо-импульсов из нарастающей серии, показанной на фиг. 5, *а* (кружки). Затухание на частотах 8, 23, 31 *Мгц* измерялось обычным способом — по отношению амплитуд звуковых импульсов на данной частоте. Экспериментальные ординаты на фиг. 6 нормировались по максимуму теоретической кривой.

Зная амплитуду первого звукового импульса, мощность и коэффициент преобразования приемной и излучающей кварцевых пластинок, можно определить величину Г. Расчеты дают для калий-дигидрогенфосфата $\Gamma_x = 40$, $\Gamma_z = 15$ с точностью 50%, откуда $C_{111} = 3{,}5 \cdot 10^{13}$ *г/см·сек*^{2} и $C_{333} = -1{,}1 \cdot 10^{13}$ *г/см·сек*^{2}.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Исакович. Нелинейные эффекты в некоторых задачах акустики. Акуст. ж., 1960, 6, 3, 321—323.
2. B. A. Richardson, R. B. Thompson, C. D. W. Wilkinson. Finite-amplitude acoustic waves in dielectric cristals JASA, 1968, 44, 6, 1608—1614.
3. A. L. Van Buren, M. A. Breazeale. Reflection of finite-amplitude ultrasonic waves JASA, 1968, 44, 4, 1014—1027.
4. P. H. Carr. Second. harmonic generation of microwave phonons in quartz and sapphire Phys. Rev., 1968, 169, 3, 718—729.
5. Л. К. Зарембо, В. А. Красильников. Введение в нелинейную акустику, М., 1966.
6. M. Moriamez, P. Théry, E. Bridoux, M. Delannoy. Contribution a l'étude theoretique de la géneration de la seconde harmonique. C. R. Acad. Sc. Paris. 270, B-305, 1970.
7. В. Е. Иванов. Об измерении скорости ультразвука в твердых телах интерферометром с двумя преобразователями. Научные труды высших учебных заведений Литовской ССР, Ультразвук, 1969, 135—141.
8. А. А. Гедройц, В. А. Красильников. Упругие волны конечной амплитуды и отклонения от закона Гука. ЖЭТФ, 1962, 43, 11, 1592—1596.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию 3 мая 1971 г.