АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XVII 1971 Вып. 3

УДК 534.232

ОБ УТОЧНЕНИИ РАСЧЕТА ВЗАИМНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ ПОРШНЕЙ В ВЫПУКЛОМ ЭКРАНЕ

Ю. Ю. Добровольский

Найден поправочный член к универсальной функции Фока, позволяющий повысить точность расчета по асимптотическим формулам взаимного сопротивления излучения поршней в выпуклом экране с постоянными главными радиусами кривизны.

В работе [1] с помощью коротковолновой асимптотики функции Грина получены простые приближенные формулы, определяющие взаимное сопротивление излучения Z_{12} полос и малых поршней, заключенных в жесткие гладкие выпуклые экраны, радиусы кривизны поверхности которых велики по сравнению с длиной волны. При постоянных главных радиусах кривизны формулы упрощаются и принимают вид

$$Z_{12} = \frac{1}{2} V(x_{12}, 0, 0, 0) Z^{\text{п}}, \tag{1}$$

где $V(x_{12}, 0, 0, 0)$ — универсальная функция Фока [2], $Z^{\text{п}}$ — взаимное сопротивление рассматриваемых поршней в плоском экране. Ниже в результате преобразования строгого выражения функции Грина для частной двухмерной краевой задачи получена уточненная функция Фока, использование которой позволяет расширить область применения формулы (1) в сторону меньших радиусов кривизны поверхности экранов.

Двухмерная функция Грина, удовлетворяющая граничным условиям задачи Неймана, для внешнего пространства кругового цилиндра при положении источника и точки наблюдения на поверхности имеет вид [3]

$$G(\mathbf{r}/\mathbf{r}') = -\frac{1}{2\pi ka} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{H_n^{(1)}(ka)}{H_n^{(1)\prime}(ka)} e^{in(\varphi-\varphi')}, \tag{2}$$

где a — радиус цилиндра, $H_n^{(1)}(ka)$ — функция Ханкеля, $\varphi - \varphi'$ — центральный угол между точкой наблюдения и источником, $k = 2\pi / \lambda$, где λ — длина волны. Применяя преобразование Ватсона, перепишем выражение (2) в виде интеграла по контуру $C = C_1 + C_2$ (фиг. 1) в плоскости индекса функции Ханкеля

$$G(\mathbf{r}/\mathbf{r}') = -\frac{i}{4\pi ka} \int_C \frac{H_\nu^{(1)}(ka)}{H_\nu^{(1)\prime}(ka)} \frac{e^{i\nu[(\varphi-\varphi')-\pi]}}{\sin \nu\pi} d\nu. \tag{3}$$

Если на участке интегрирования C_2 в выражении (3) произвести замену ν на $-\nu$, воспользоваться соотношением $H_{-\nu}^{(1)}(x) = (e^{i\pi\nu}H)^{(1)}{}_\nu(x)$ и разложе-

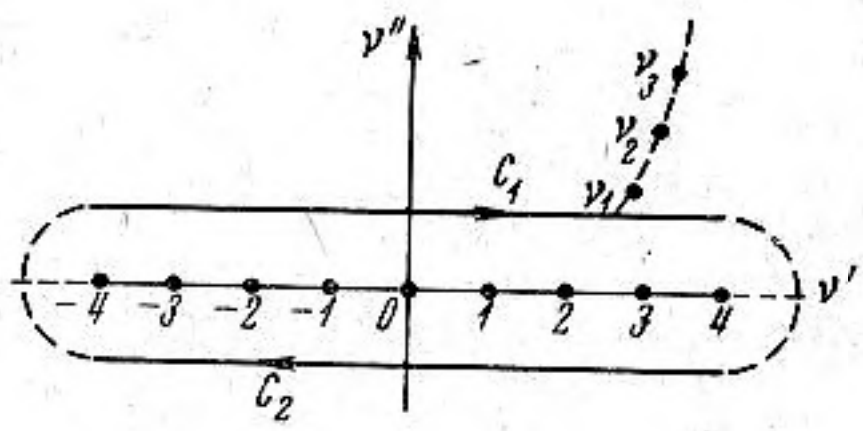
нием $\frac{1}{\sin \nu\pi} = -2i \sum_{p=0}^{\infty} e^{i\pi\nu(2p+1)}$, а также изменить порядок интегрирования и суммирования, получим

$$G(\mathbf{r}/\mathbf{r}') = -\frac{1}{2\pi ka} \sum_{p=0} [I(\beta_{1,p}) + I(\beta_{2,p})], \tag{4}$$

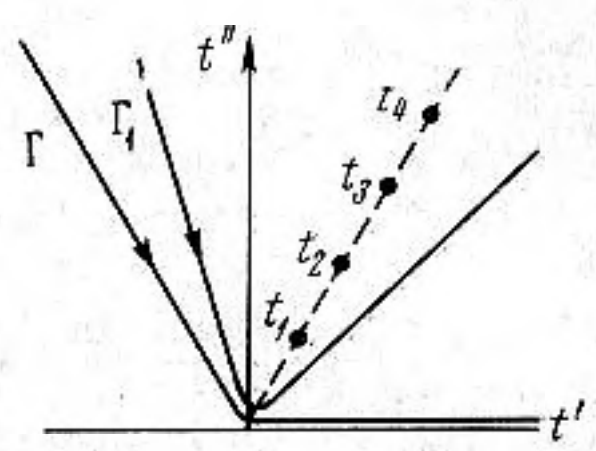
где

$$I(\beta) = \int_{C_1} \frac{H_\nu^{(1)}(ka)}{H_\nu^{(1)\prime}(ka)} e^{i\nu\beta} d\nu; \; \beta_{1,p} = (\varphi - \varphi') + 2\pi p; \; \beta_{2,p} = 2\pi(p+1) - (\varphi - \varphi').$$

Главный участок интегрирования по контуру C_1 соответствует значениям индекса, имеющим порядок величины аргумента функции Ханкеля [4].



Фиг. 1



Фиг. 2

При этих соотношениях ν и ka справедливы асимптотические разложения в виде степенных рядов относительно обратных степеней параметра:

$$M = (ka/2)^{1/3},$$

$$H_\nu^{(1)}(ka) = -\frac{i}{\sqrt{\pi}} M^{-1} \left\{ w(t) - \frac{1}{60} M^{-2} w^{(5)}(t) + \ldots \right\},$$

$$H_\nu^{(1)}(ka) = \frac{i}{\sqrt{\pi}} M^{-2} \left\{ w'(t) - \frac{1}{60} M^{-2} [(t^3 - 6) w(t) - 4t w'(t)] + \ldots \right\}, \tag{5}$$

где $\nu = ka + Mt$. Комплексная функция Эйри является решением дифференциального уравнения

$$w''(t) - tw(t) = 0. \tag{6}$$

Обычно, при преобразованиях интегралов типа $I(\beta)$, ограничиваются первыми членами разложения (5) [4]. В этом случае

$$I(\beta) = -M^2 e^{ika\beta} \int_{C_1} \frac{w(t)}{w'(t)} e^{ixt} dt, \tag{7}$$

где $x = M\beta$. Введя универсальную функцию в обозначениях В. А. Фока

$$V(x, 0, 0, 0) = e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{x}{\pi}} \int_{\Gamma} \frac{w(t)}{w'(t)} e^{ixt} dt, \tag{8}$$

получим

$$I(\beta) = -M^2 e^{ika\beta} \sqrt{\frac{i\pi}{x}} V(x, 0, 0, 0). \tag{9}$$

Контур интегрирования Γ в плоскости $t = it''$ показан на фиг. 2.

В результате подстановки выражения (9) в формулу (4) найдем коротковолновую асимптотику функции Грина в первом приближении, которая использовалась в работе [1].

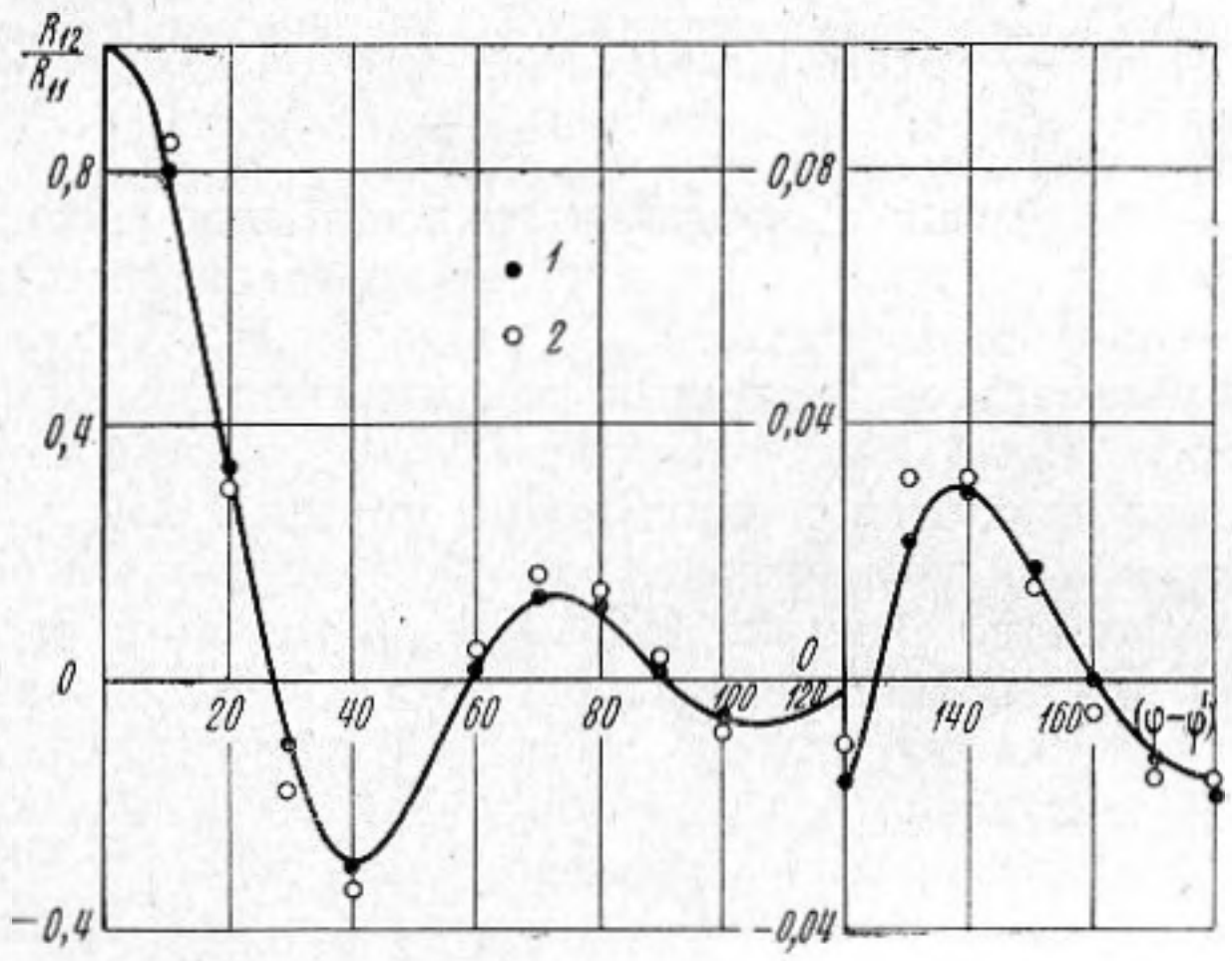
Для расширения области применения конечных выражений сохраним в интеграле $I(\beta)$ два первых члена ряда, являющихся частным от деления двух степенных рядов (5). В результате приходим к формуле (9), в которой $V(x, 0, 0, 0)$ следует заменить уточненной функцией Фока

$$W(x, 0, 0, 0) = V(x, 0, 0, 0) + M^{-2} v(x, 0, 0, 0), \tag{10}$$

где

$$v(x, 0, 0, 0) = \frac{1}{60}\sqrt{\frac{x}{i\pi}} \int\limits_{\Gamma_1} \left[(t^3 - 6)\left(\frac{w(t)}{w'(t)}\right)^2 - 8t\frac{w(t)}{w'(t)} - t^2 \right] e^{ixt}\, dt. \tag{11}$$

Поправочный член $v(x, 0, 0, 0)$, обеспечивающий получение функции Грина $G(\mathbf{r} / \mathbf{r}')$ во втором приближении, имеет универсальный характер. Так же



Фиг. 3

как и $V(x, 0, 0,0)$ он является функцией безразмерного расстояния и непосредственно не зависит от волнового размера цилиндра. Контур Γ_1 в положительном направлении охватывает полюсы подынтегрального выражения (11), которые сосредоточены в плоскости t на луче $\arg t = \pi / 3$ (фиг. 2). Полюсы определяются корнями уравнения $w'(t_s) = 0$, где $s = 1, 2, 3, \ldots$, и связаны с полюсами ν_s в плоскости переменной ν (фиг. 1) соотношением $\nu_s = ka + Mt_s$.

Используя теорему о вычетах и учитывая соотношение (6), напишем выражение для поправочного члена в следующем виде:

$$v(x, 0, 0, 0) = \frac{\sqrt{i\pi x}}{30} \sum_{s=0}^{\infty} \times$$
$$\times \frac{2(t_s^3+3) + ixt_s(t_s^3+6) + 8t_s^3}{t_s^3} e^{ixt_s}. \tag{12}$$

x	$\lvert v(x, 0, 0, 0)\rvert$	$\arg v(x, 0, 0, 0)$
0,5	0,507	248°54′
1	0,450	248°33′
2	0,334	269°34′
3	0,226	293°21′
4	0,129	320°37′
5	0,071	348°23′
6	0,037	376°47′

При $x > 1$ в сумме правой части (12) достаточно сохранить несколько первых слагаемых. Численные значения поправочного члена приведены в таблице.

В результате подстановки асимптотического выражения интеграла $I(\beta)$ в формулу (4) получим

$$G(\mathbf{r}/\mathbf{r}') = \frac{i}{4} e^{-i\frac{\pi}{4}} \left[\sum_{p=0}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi k a \beta_{1,p}}} W(x_{1,p}, 0, 0, 0) e^{ika\beta_{1,p}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{p=0}^{\infty} \times \sqrt{\frac{2}{\pi k a \beta_{2,p}}} W(x_{2,p}, 0, 0, 0) e^{ika\beta_{2,p}} \right], \qquad (13)$$

где $x_{1,\,p} = M\beta_{1,\,p}$; $x_{2,\,p} = M\beta_{2,\,p}$.

Выражение (13) представляет собой разложение по ползущим волнам двухмерной функции Грина для кругового цилиндра. Известно, что основной вклад определяется членами ряда $p = 0$, соответствующими двум ползущим волнам, огибающим цилиндр с противоположных направлений [5].

Используя формулу (13) и следуя работе [1], приходим к выражению взаимного сопротивления двух узких полос в абсолютно жестком круговом цилиндрическом экране

$$Z_{12} = \frac{1}{2} W(x_{1,0}, 0, 0, 0) Z_1^{\text{п}} + \frac{1}{2} W(x_{2,0}, 0, 0, 0) Z_2^{\text{п}}, \qquad (14)$$

где $Z_1^{\text{п}}$ и $Z_2^{\text{п}}$ — взаимные сопротивления излучения рассматриваемых полос в плоском экране, удаленных друг от друга на расстояния $a(\varphi - \varphi')$ и $a[2\pi - (\varphi - \varphi')]$ соответственно.

На фиг. 3 показаны вычисленные разными методами значения отношений активных составляющих взаимного R_{12} и собственного R_{11} сопротивлений излучения двух бесконечных полос шириной $0{,}1\lambda$ в цилиндрическом экране при $ka = 5$. Обозначение *1* соответствует данным расчета с учетом поправочного члена по формуле (14), *2* — результатам расчета по формуле работы [1]. Для сравнения сплошной линией показаны результаты, вычисленные по точному методу собственных функций, согласно работе [6]. Как видно, использование поправочного члена позволяет выполнять расчеты по асимптотическим формулам с удовлетворительной точностью вплоть до радиусов кривизны, соизмеримых с длиной волны.

Производя аналогичные преобразования, легко показать, что найденные выражения (10) и (11), уточняющие коротковолновую асимптотику двухмерной функции Грина для кругового цилиндра, справедливы также для функций Грина внешней области тел с постоянными главными радиусами кривизны: кругового цилиндра в трехмерном случае и сферы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Ю. Добровольский. Взаимное сопротивление излучения малых поршней в выпуклом экране. Акуст. ж., 1970, 16, 4, 516—520.
2. П. А. Азрилянт, М. Г. Белкина. Численные результаты теории дифракции радиоволн вокруг земной поверхности. М., «Сов. радио», 1957.
3. Ф. М. Морс, Г. Фешбах. Методы теоретической физики, 1. М., ИЛ, 1958.
4. В. А. Фок. Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности. М., Изд-во АН СССР, 1946.
5. Х. Хенл, А. Мауэ, К. Вестпфаль. Теория дифракции. М., «Мир», 1964.
6. I. E. Greenspon, C. H. Sherman. Mutual radiation impedance and nearfield pressure for pistons on a cylinder. J. Acoust. Soc. America, 1964, 36, 1, 149—159.

Ленинград

Поступила в редакцию
16 февраля 1970 г.