АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XVII 1971 Вып. 1

УДК 534.21

К ДИНАМИКЕ СЛОИСТЫХ СРЕД

П. Ф. Сабодаш

В линейной постановке решается нестационарная задача о прохождении плоской одномерной волны напряжения через линейно-вязко-упругий слой конечной толщины, разделяющий два линейно-упругих полупространства с различными свойствами. Приводятся графики, наглядно иллюстрирующие влияние свойств вязкого слоя, который можно рассматривать как своеобразный демпфер колебаний. Решение задачи строится на основе использования принципа динамического соответствия, сформулированного в работе [1].

1. Предположим, что в системе прямоугольных декартовых координат xyz первое полупространство занимает область $x < 0$, $-\infty < yz < +\infty$; слой занимает область $0 < x < h$, $-\infty < yz < +\infty$; второе полупространство занимает область $x > h$, $-\infty < yz < +\infty$ (фиг. 1). Соответственные области на фигуре отмечены цифрами *1 — 3*. Упругие параметры сред, заполняющих соответствующие области, обозначим через λ_i, μ_i, ρ_i $(i = 1, 2, 3)$, где λ_i и μ_i — параметры Ляме, ρ_i — плотность материала.

Пусть из бесконечности в среде 1 распространяется вдоль оси Ox плоская нестационарная волна, которая в момент времени $t = 0$ падает на грань $x = 0$ слоя. Задача состоит в определении волнового поля в среде 3 для всех моментов времени $t > 0$. Падающая плоская волна для определенности задается в виде ступеньки, но в силу линейности задачи это ограничение несущественно.

Если влиянием массовых сил пренебречь, то задача в упругой области сводится к интегрированию одномерных уравнений:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} = \frac{1}{a_i^2}\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad a_i = \sqrt{\frac{\lambda_i + 2\mu_i}{\rho_i}} \quad (i = 1,2,3) \tag{1}$$

где $u_i(x, t)$ — смещения в направлении оси Ox, a_i — скорости упругих волн. Граничные условия сводятся к непрерывности перемещений и напряжений на плоскостях слоя, контактирующих с упругими полупространствами,

$$u_1 = u_2, \quad \rho_1 a_1^2 \frac{\partial u_1}{\partial x} = \rho_2 a_2^2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \text{ при } x = 0,\ t \geqslant 0,$$

$$u_2 = u_3, \quad \rho_2 a_2^2 \frac{\partial u_2}{\partial x} = \rho_3 a_3^2 \frac{\partial u_3}{\partial x} \text{ при } x = h,\ t \geqslant 0. \tag{2}$$

Начальные условия нулевые:

$$u_2 = \frac{\partial u_2}{\partial t} = u_3 = \frac{\partial u_3}{\partial t} = 0 \text{ при } t \leqslant 0 \tag{3}$$

и означают, что до момента времени $t \leqslant 0$ в среде $x > 0$ царил покой. Падающую волну в среде 1 мы задаем в виде $u^{\text{пад}} = u_0 H(a_1 t - x)$, где u_0 — const, H — единичная функция.

Задачу (1)—(3) мы будем решать на основе использования одностороннего преобразования Лапласа по времени:

$$\bar{u}_i(x, p) = \int_0^\infty u_i(x, t)\, e^{-pt} dt, \quad \operatorname{Re} p > 0. \tag{4}$$

В терминах изображений решение упругой задачи напишется так:

$$\bar{u}_1(x, p) = C_1 e^{\frac{p}{a_1} x} + \frac{u_0}{p} e^{-\frac{px}{a_1}}, \quad \bar{u}_2(x, p) = C_2 e^{\frac{p}{a_2} x} + C_3 e^{-\frac{p}{a_2} x}, \quad \bar{u}_3(x, p) = C_4 e^{-\frac{p}{a_3} x} \tag{5}$$

Произвольные постоянные интегрирования C_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ определяются из преобразованных по Лапласу граничных условий:

$$\bar{u}_1 = \bar{u}_2, \quad \rho_1 a_1^2 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} = \rho_2 a_2^2 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x} \quad \text{при } x = 0,$$

$$\bar{u}_2 = \bar{u}_3, \quad \rho_2 a_2^2 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x} = \rho_3 a_3^2 \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x} \quad \text{при } x = h. \tag{6}$$

Условия (6) используются для определения четырех неизвестных величин C_k.

Будем интересоваться полем в упругой области 3:

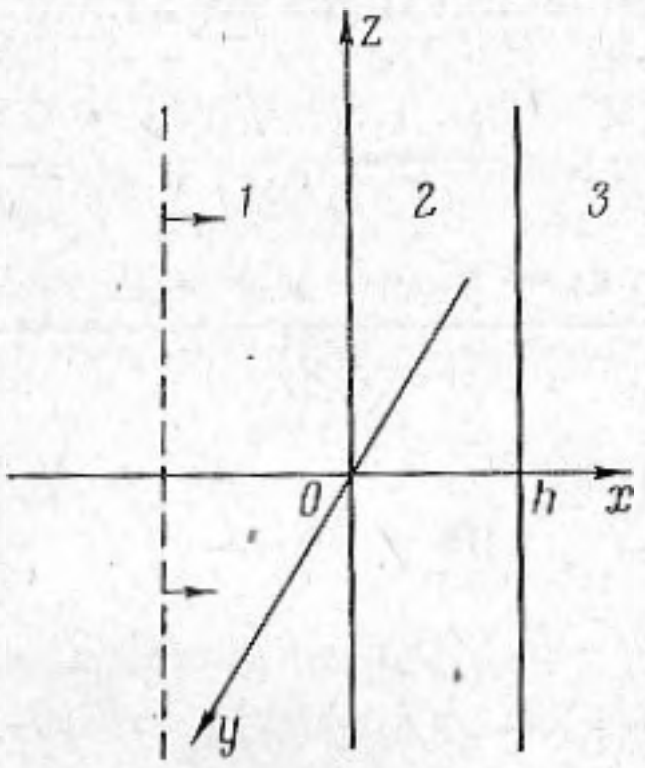
$$\bar{u}_3(x, p) = 4Au_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\omega|^n}{p} \exp\left[\frac{h - x}{a_3} - \frac{(2n+1)h}{a_2}\right] p, \tag{7}$$

$$A = \frac{\rho_1 a_1 \rho_2 a_2}{(\rho_1 a_1 + \rho_2 a_2)(\rho_2 a_2 + \rho_3 a_3)}, \quad \omega = \frac{(\rho_2 a_2 - \rho_3 a_3)(\rho_2 a_2 - \rho_1 a_1)}{(\rho_2 a_2 + \rho_3 a_3)(\rho_2 a_2 + \rho_1 a_1)}, \quad |\omega| < 1.$$

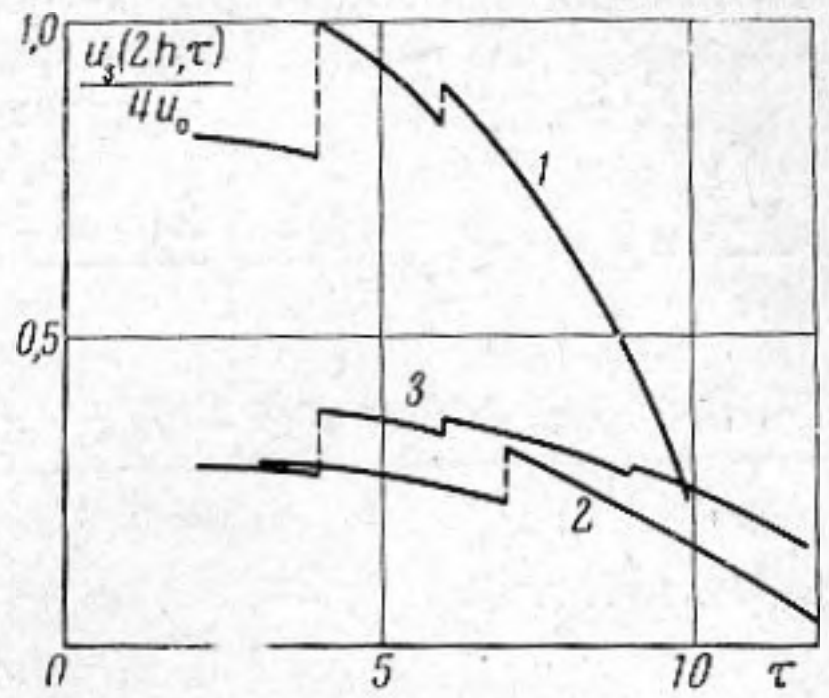
Обращение (7) выполняется при помощи таблиц [2] и принимает вид

$$u_3^{\text{н}}(x, t) = 4Au_0 \sum_{n=0}^{\infty} |\omega|^n H(t - m_n), \quad m_n = \frac{(1+2n)h}{a_2} + \frac{x - h}{a_3} > 0, \tag{8}$$

где $H(z)$ означает единичную функцию Хевисайда. Если волна смещения в области 1, падающая на границу $x = 0$, задается в виде произвольной



Фиг. 1



Фиг. 2

функции $f(a_1 t - x)$, то для определения поля упругого смещения в области 3 следует воспользоваться интегралом Дюамеля в форме [3]

$$u_3^f(x, t) = f(0)\, u_3^{\text{н}}(x, t) + \int_0^t \frac{df(s)}{ds} u_3^{\text{н}}(x, t - s)\, ds, \tag{9}$$

где $u_3^{\text{н}}(x, t)$ выражается по формуле (8). Таким образом, получается выражение для смещения в области 3 в самом общем виде для произвольного

воздействия на границе $x = 0$:

$$u_3^f(x,t) = 4u_0 A \sum_{n=0}^{\infty} |\omega|^n f(t - m_n) \text{ при } t - m_n \geqslant 0,$$

$$u_3^f(x,t) \equiv 0 \quad \text{при} \quad t - m_n < 0. \tag{10}$$

2. Задачу определения параметров возмущенного поля в области 3 с учетом вязко-упругих свойств слоя мы будем решать на основе принципа динамического соответствия, сформулированного в работе [1]. Согласно этому принципу в выражении (7) значение a_2 заменяется на $a_2(p) = [\rho_2 I(p)]^{-1/2}$, где $I(p)$ означает комплексную податливость вязкого материала слоя. Для вязко-упругих моделей довольно широкого класса $I(p)$ можно представить в виде

$$I(p) = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \ldots + a_1 p + a_0}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_1 p + b_0}. \tag{11}$$

Будем рассматривать модели, обладающие мгновенной упругостью, т. е. будем считать, что в выражении для $I(p)$ коэффициенты $a_m \neq 0$ и $b_m \neq 0$.

Изучим асимптотическое поведение решения при $p \to \infty$. В этом случае выражение для $I(p)$ можно представить в виде

$$I(p) = \frac{a_m}{b_m}\left[1 + \frac{A_1}{p} + \frac{B_1}{p^2} + 0\left(\frac{1}{p^3}\right)\right], \quad A_1 = \frac{a_{m-1}}{a_m} - \frac{b_{m-1}}{b_m},$$

$$B_1 = \frac{a_{m-2}}{a_m} - \frac{b_{m-2}}{b_m} - \frac{b_{m-1}}{b_m}\left(\frac{a_{m-1}}{a_m} - \frac{b_{m-1}}{b_m}\right). \tag{12}$$

С учетом формулы (12) получаются следующие разложения:

$$[\rho_2 I(p)]^{1/2} = \left(\rho_2 \frac{a_m}{b_m}\right)^{1/2}\left[1 + \frac{A_1}{2p} + \frac{1}{2p^2}\left(B_1 - \frac{A_1^2}{4}\right) + 0\left(\frac{1}{p^3}\right)\right],$$

$$[\rho_2 I(p)]^{-1/2} = \left(\rho_2 \frac{a_m}{b_m}\right)^{-1/2}\left[1 - \frac{A_1}{2p} + \frac{1}{2p^2}\left(\frac{3}{4}A_1^2 - B_1\right) + 0\left(\frac{1}{p^3}\right)\right].$$

Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательные асимптотические выражения для A и ω при $p \to \infty$:

$$A = \frac{\rho_1 a_1 \varkappa}{\gamma_1}\left[1 + \frac{N_1}{2p} + \frac{N_2}{2p^2} + O\left(\frac{1}{p^3}\right)\right], \quad \omega = n_{1+} + \frac{n_2}{2p} + \frac{n_3}{2p^2} + O\left(\frac{1}{p^3}\right),$$

$$N_1 = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} - A_1, \quad N_2 = \frac{1}{2}\left\{\frac{2(3/4 A_1^2 - B_1)(\rho_1 a_1 - \rho_2 a_3 - \varkappa^2) - (A_1\varkappa)^2}{(\rho_1 a_1 + \varkappa)(\rho_3 a_3 + \varkappa)} + \right.$$

$$\left. + \frac{A_1^2 \varkappa(\rho_1 a_1 + \rho_3 a_3 + 2\varkappa)}{(\rho_1 a_1 + \varkappa)^2}\frac{(\varkappa^2 - \rho_1 a_1 \rho_3 a_3)}{(\rho_3 a_3 + \varkappa)^2}\right\}, \quad \gamma_1 = (\rho_1 a_1 + \varkappa)(\rho_3 a_3 + \varkappa), \tag{13}$$

$$\gamma_2 = A_1 \varkappa(\rho_1 a_1 + \rho_3 a_3 + 2\varkappa), \quad \gamma_3 = \varkappa(3/4 A_1^2 - B_1)(\rho_1 a_1 + \rho_3 a_3 + 2\varkappa) + 1/2 (A_1\varkappa)^2,$$

$$\gamma_4 = (\varkappa - \rho_1 a_1)(\varkappa - \rho_3 a_3),$$

$$\gamma_5 = A_1 \varkappa(2\varkappa - \rho_1 a_1 - \rho_3 a_3), \quad \gamma_6 = \varkappa(3/4 A_1^2 - B_1)(2\varkappa - \rho_3 a_3 - \rho_1 a_1) + 1/2 (A_1\varkappa)^2,$$

$$n_1 = \frac{\gamma_4}{\gamma_1},$$

$$n_2 = \frac{1}{\gamma_1}\left(\frac{\gamma_2\gamma_4}{\gamma_1} - \gamma_5\right), \quad n_3 = \frac{1}{\gamma_1}\left[\left(\gamma_6 - \frac{\gamma_3\gamma_4}{\gamma_1}\right) + \frac{\gamma_2}{2\gamma_1}\left(\frac{\gamma_2\gamma_4}{\gamma_1} - \gamma_5\right)\right],$$

$$\varkappa = \rho_2\left(\rho_2 \frac{a_m}{b_m}\right)^{-1/2}.$$

Теперь для определения поля в области 3, вызванного падением на

границу $x = 0$ ступеньки $u_{\text{пад}} = u_0 H(a_1 t - x)$, вместо выражения (7) следует обращать выражение:

$$\bar{u}_3(x, p) = 4u_0 \frac{\rho_1 a_1 \varkappa}{\gamma_1} \left(1 + \frac{N_1}{2p} + \frac{N_2}{2p^2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(n_1 + \frac{n_2}{2p} + \frac{n_3}{2p^2}\right)^n \frac{1}{p} \times$$

$$\times \exp\left(m_1 + m_2 p + \frac{m_3}{2p}\right), \qquad (14)$$

$$m_1 = -{}^1/_2 A_1 h(1 + 2n) \left(\rho_2 \frac{a_m}{b_m}\right)^{1/2}, \quad m_2 = \frac{h - x}{a_2} - h(1 + 2n) \left(\rho_2 \frac{a_m}{b_m}\right)^{1/2},$$

$$m_3 = ({}^1/_4 A_1^2 - B_1) h(1 + 2n) \left(\rho_2 \frac{a_m}{b_m}\right)^{1/2},$$

С учетом асимптотического представления изображения при $p \to \infty$ получаем окончательно смещение в области 3, преобразованное по Лапласу:

$$\bar{u}_3(x, p) = 4u_0 \frac{\rho_1 a_1 \varkappa}{\gamma_1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} C_n^k (n_1)^{n-k} \left(\frac{n_2}{2}\right)^k \times$$

$$\times \left(\frac{1}{p^{k+1}} + \frac{N_1}{2p^{k+2}} + \frac{N_2}{2p^{k+3}}\right) \cdot \exp(m_1 + m_2 p). \qquad (15)$$

Обращение выражения (15) выполняется на основе применения таблиц [2]. С учетом многократных отражений вязко-упругих фронтов от обеих границ слоя мы получаем окончательно интерференционную картину смещений частиц в области 3 при асимптотическом обращении изображения

$$u_3(x, t) = 4u_0 \frac{\rho_1 a_1 \varkappa}{\gamma_1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} C_n^k (n_1)^{n-k} \left(\frac{n_2}{2}\right)^{m_1} \left[\frac{(t - m_0)^k}{\Gamma(1 + k)} + \frac{N_1 (t - m_0)^{k+1}}{2\Gamma(2 + k)} + \right.$$

$$\left. + \frac{N_2 (t - m_0)^{k+2}}{2\Gamma(3 + k)}\right], \quad m_0 = h(1 + 2n) \left(\rho_2 \frac{a_m}{b_m}\right)^{1/2} + \frac{x - h}{a_3} > 0. \qquad (16)$$

В формуле (16) $\Gamma(z)$ означает гамма-функцию, C_n^k — биноминальные коэффициенты. Смещение $u_3(x, t)$ тождественно обращается в нуль при $t < m_0$. Зависимость (16) полностью определяет поле для общего вида соотношения (11) при источнике ступенчатого типа на границе $x = 0$. Для определения $u_3(x, t)$ при произвольном граничном воздействии следует воспользоваться интегралом Дюамеля (9). Для анализа решения, выражаемого зависимостью (16), предположим, что в выражении для $I(p)$ коэффициенты $a_2 \neq 0$, $b_2 \neq 0$, $b_0 \neq 0$, все остальные коэффициенты равны нулю. В этом частном предположении формула (16) принимает вид

$$u_3(x, t) = 4u_0 \frac{\rho_1 a_1 \varkappa}{\gamma_1} \sum_{n=0}^{\infty} (n_1)^n \left[H(t - m_0) + \frac{N_\Gamma}{4} (t - m_0)^2\right], \text{ при } t - m_0 \geqslant 0,$$

$$u_3(x, t) \equiv 0 \text{ при } t < m_0. \qquad (17)$$

Определим закон изменения смещения во времени в среде 3 в точке $x = 2h$, полученный на основе зависимости (17):

$$\frac{u_3(2h, \tau)}{4u_0} = \omega_1 \sum_{n=0}^{\infty} (n_1)^n \left\{H[\tau - (1 + (1 + 2n)q)] + \frac{q_1 \omega_2}{4} [\tau - (1 + (1 + 2n)q)^2]\right\},$$

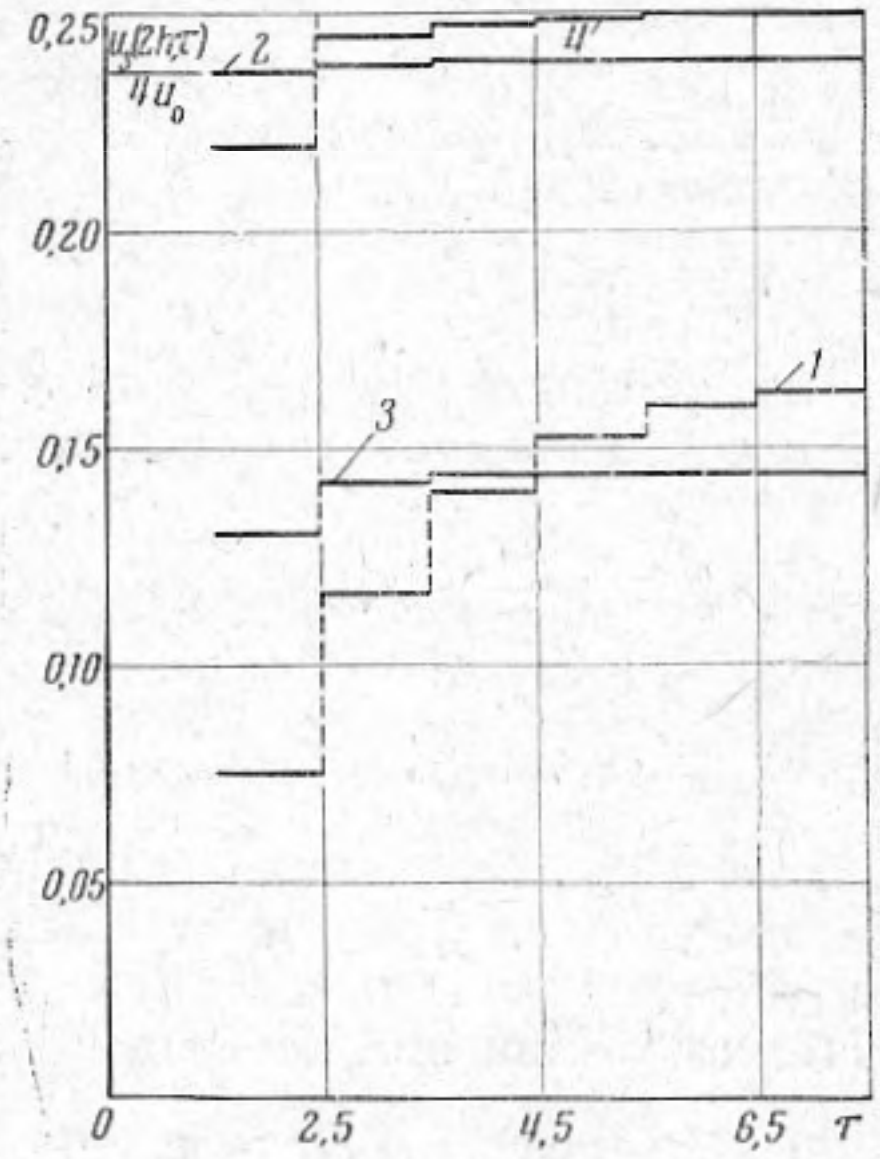
$$\tau = \frac{a_3 t}{h}, \quad q = a_3 \left(\frac{\rho_2 a_2}{b_2}\right)^{1/2} > 0, \quad q_1 = \frac{b_0}{b_2} \left(\frac{h}{a_3}\right)^2, \quad \omega_1 = \frac{\varkappa/\rho_3 a_3}{(1 + \varkappa/\rho_1 a_1)(1 + \varkappa/\rho_3 a_3)}, \qquad (18)$$

$$\omega_2 = \frac{1 - \varkappa/\rho_1 a_1 \cdot \varkappa/\rho_2 a_3}{(1 + \varkappa/\rho_1 a_1)(1 + \varkappa/\rho_3 a_3)}, \quad \varkappa = \rho_2 \left(\frac{\rho_2 a_2}{b_2}\right)^{-1/2},$$

$$n_1 = \frac{(\varkappa/\rho_1 a_1 - 1)(\varkappa/\rho_3 a_3 - 1)}{(\varkappa/\rho_1 a_1 + 1)(\varkappa/\rho_3 a_3 + 1)} < 1.$$

Безразмерное смещение в (18), являясь функцией переменной τ, зависит от четырех безразмерных параметров задачи: $\varkappa / \rho_1 a_1$, $\varkappa / \rho_3 a_3$, q, q_1.

Для выяснения влияния вязко-упругих свойств слоя на параметры движения в области 3 в точке $x = 2h$ были проведены численные расчеты по формуле (18) и по формуле (8). Результаты расчетов по формуле (18) представлены на фиг. 2, где *1* — результаты расчетов для значений исходных параметров $q = 1$; $\varkappa / \rho_1 a_1 = 0{,}1$; $\varkappa / \rho_3 a_3 = 0{,}5$; $q_1 = -0{,}1$; *2* — относится к случаю $q = 2$; $\varkappa / \rho_1 a_1 = 0{,}1$; $\varkappa / \rho_3 a_3 = 0{,}5$; $q_1 = -0{,}1$. Значения исходных параметров для случая 3, следующие: $q = 1$; $\varkappa / \rho_1 a_1 = 0{,}1$; $\varkappa / \rho_3 a_3 = 0{,}5$; $q_1 = -0{,}05$.



Фиг. 3

На фиг. 3 представлено изменение смещения в точке $x = 2h$ как функция безразмерного времени $\tau = a_3 t / h$, рассчитанное на основе зависимости (8). Для всех четырех вариантов расчета $a_3 / a_2 = 0{,}5$: *1* — результаты расчетов для значений $\rho_1 a_1 / \rho_2 a_2 = 0{,}1$; $\rho_3 a_3 / \rho_2 a_2 = 0{,}2$, *2* — соответствует отношениям $\rho_1 a_1 / \rho_2 a_2 = 1{,}1$; $\rho_3 a_3 / \rho_2 a_2 = 1{,}2$; *3* — относится к случаю $\rho_1 a_1 / \rho_2 a_2 = 0{,}5$; $\rho_3 a_3 / \rho_2 a_2 = 1{,}5$, *4* — результаты расчета при одинаковом отношении акустических жесткостей $\rho_1 a_1 / \rho_2 a_2 = \rho_3 a_3 / \rho_2 a_2 = 0{,}5$.

Расчеты по обеим формулам выполнены с учетом первых десяти ($n = 10$) отражений волновых фронтов от границ слоя, разделяющего полупространства 1 и 3. Скачки на фигурах соответствуют приходу многократно отраженных от границ слоя плоских одномерных волн; амплитуды скачков уменьшаются с течением времени, что указывает на уменьшающуюся интенсивность последующих отражений. Наиболее интенсивный первый скачок. Влияние вязких свойств слоя проявляется в быстром уменьшении амплитуды последовательных отражений волн.

Рассмотренная динамическая задача представляет наибольший интерес в двух случаях: когда полупространства 1 и 3 заполнены линейно-упругой средой (задача о защитных свойствах пластины) и когда пластина на поверхности $x = h$ граничит с вакуумом ($a_3 = \rho_3 = 0$) — динамический расчет упругой или вязко-упругой пластины конечной толщины, спаянной с полупространством. В первом случае вязко-упругие свойства разделяющей пластины можно подобрать таким образом, чтобы добиться оптимальных параметров движения и напряжений в области 3.

Численный анализ относится к случаю, когда падающая на границу $x = 0$ волна является ступенькой смещения интенсивности $u_0 H(a_1 t - x)$. Для определения параметров при других видах источников следует пользоваться зависимостью (9).

В заключение укажем, что ряд задач по распространению упругих волн в плоско-параллельных слоях изложены в нашей монографии [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Бленд. Теория линейной вязко-упругости. Пер. с англ. М., «Мир», 1965.
2. В. А. Диткин, А. П. Прудников. Справочник по операционному исчислению. М., Высшая школа, 1965.
3. А. А. Харкевич Неустановившиеся волновые явления. М., ГТТИ, 1950.
4. Х. А. Рахматулин, Я. У. Саатов, П. Ф. Сабодаш, И. Г. Филиппов. Двумерные задачи по неустановившемуся движению сжимаемых сред. ФАН Узбекской ССР, Ташкент, 1969.

Центральный н.-и. институт машиностроения
Москва

Поступила в редакцию
26 декабря 1969 г.