где $h_{\min} = \ln\left(1 + \frac{\Delta f_{\min}}{f}\right)$ и $n = 5, 6, 7$ соответственно. Плотность точек измерений значительно выше на участках вблизи экстремумов исследуемой функции, что и является следствием автоматической адаптации процесса измерения к реальным свойствам исследуемого объекта. Для приведенных характеристик при увеличении числа интервалов n между максимальным и минимальным приращениями аргумента на единицу плотность группировки точек измерений вблизи экстремумов увеличивается вдвое, тогда как общее число точек возрастает в среднем приблизительно только в 1,5 раза. Это показывает, что с увеличением требуемой точности эффективность машинного управления экспериментом существенно возрастает, что в конечном счете приводит к соответствующему уменьшению времени, затрачиваемого на проведение опытов.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. R. Schraeder. Computers in acoustics: symbiosis of an old science and a new tool. J. Acoust. Soc. America, 1969, 45, 5, 1077—1086.
2. Г. С. Любашевский, Ю. И. Матвеев, Б. Д. Тартаковский. Использование ЦВМ для исследования колебательных характеристик механических объектов при переменном шаге по аргументу. Тр. VI Всесоюзной акустической конференции, секция В. М., 1968.
3. Г. С. Любашевский, Б. Д. Тартаковский, В. Э. Фришберг. Авторское свидетельство № 224838 от 31.05.67. Бюл № 26 от 12.VIII.68 г.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступило в редакцию
7 апреля 1970 г.

УДК 534.26

ОБ ИЗЛУЧЕНИИ ЗВУКА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКОЙ

Р. Н. Михайлов

Как известно, из рассмотрения задачи Рэлея об излучении для бесконечной плоской пластины, по которой бежит плоская волна $e^{ikx-i\omega t}$, где k — волновое число бегущей волны, x — направление распространения, ω — круговая частота, t — время, следует, что излучение отсутствует, если $k_{\text{ср}} < k$ ($k_{\text{ср}}$ — волновое число в среде), т. е. фазовая скорость в среде больше, чем в пластине.

Рассматривая изгибную плоскую волну, бегущую по бесконечной пластине, можно сделать вывод, что $k > k$ только на очень высоких частотах. Ситуация в корне изменяется, если рассматривать такие структуры, где могут существовать нормальные волны, обладающие дисперсией. Может случиться, что нормальная волна имеет волновое число $k = 0$. В некоторой окрестности резонансной частоты ($k = 0$) может выполняться условие излучения $k_{\text{ср}} > k$.

В качестве примера такой структуры рассмотрим замкнутую цилиндрическую оболочку с толщиной стенки h и радиусом кривизны R, смещение в которой можно представить в виде

$$w = w_0 e^{\pm in\varphi} e^{ik\alpha - i\omega t}, \tag{1}$$

где φ — угол, α — длина вдоль образующей параллельной оси z в цилиндрической системе координат. Смещение w удовлетворяет уравнению движения, приведенному в работе [1].

Уравнение для звукового давления имеет вид

$$\Delta p + k_{\text{ср}}^2 p = 0, \tag{2}$$

где Δ — оператор Лапласа. Граничное условие на поверхности оболочки имеет вид

$$\rho_{\text{ср}} \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial r}\bigg|_{r=R}. \tag{3}$$

Здесь $\rho_{\text{ср}}$ — плотности среды, v — нормальная скорость колебаний оболочки, причем

$$v = -\frac{w}{i\omega} e^{\pm in\varphi}. \tag{4}$$

Звуковое давление p ищем в виде

$$p(r, z, \varphi) = e^{\pm in\varphi} p(r, z). \tag{5}$$

Здесь r, z и φ — цилиндрические координаты, причем ось z совпадает с осью симметрии цилиндра.

Подставляя выражение (5) в формулу (2) для $p(r, z)$, получим следующее уравнение:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{n^2}{r^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k_{\text{ср}}{}^2\right)p(r, z)=0. \tag{6}$$

Для решения уравнения (6) сделаем интегральное преобразование Фурье по формуле:

$$\tilde{p}(r, k)=\int_{-\infty}^{\infty} p(r, z)\, e^{-ikz}\, dz, \tag{7}$$

тогда для Фурье-трансформанты давления $\tilde{p}$ получим

$$\frac{d^2\tilde{p}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\tilde{p}}{dr}-\frac{n^2}{r^2}\tilde{p}+(k_{\text{ср}}{}^2-k^2)\tilde{p}=0. \tag{8}$$

Решение уравнения (8), соответствующее расходящейся волне, как известно, является функцией Ханкеля первого рода порядка n:

$$\tilde{p}=AH_n^{(1)}\left(\sqrt{k_{\text{ср}}{}^2-k^2}\, r\right). \tag{9}$$

Постоянная A определяется из граничного условия (3):

$$A=\frac{4\pi\rho_{\text{ср}}w}{\omega^2}\,\frac{\delta(k_{\text{ср}}-k)}{\sqrt{k_{\text{ср}}^2-k^2}\,[H_{n-1}^{(1)}(\sqrt{k_{\text{ср}}^2-k^2}R)-H_{n+1}^{(1)}(\sqrt{k_{\text{ср}}^2-k^2}\,R)]}. \tag{10}$$

При определении A принято во внимание, что для $f(z)=e^{ikz}$ $\tilde{f}(k)=2\pi\delta(k_{\text{ср}}-k)$ ($\delta(x)$-дельта функция) и правило дифференцирования функции Ханкеля.

Сделав обратное преобразование Фурье и приняв во внимание свойство дельта-функции, получим следующее выражение для звукового давления p:

$$p(r, z)=2\frac{w\rho_{\text{ср}}}{\omega^2}\,\frac{H_n^{(1)}(\sqrt{k_{\text{ср}}^2-k^2}\, r)}{\sqrt{k_{\text{ср}}^2-k^2}\,[H_{n-1}^{(1)}(\sqrt{k_{\text{ср}}^2-k^2}\, R)-H_{n+1}^{(1)}(\sqrt{k_{\text{ср}}^2-k^2}\, R)]}. \tag{11}$$

Из структуры выражения (11) видно, что если $k_{\text{ср}}>k$, то имеется излучение в виде расходящейся цилиндрической волны. При этом зависимость давления от угла φ, согласно формуле (5), имеет вид $p(\varphi)=\cos(n\varphi)$. В противном случае ($k_{\text{ср}}<k$) излучение отсутствует.

Для определения области частот, где $k<k_{\text{ср}}$, следует обратиться к уравнениям движения оболочки. Как следует из работы [1] для нормальных волн, заданных в виде (1), дисперсионное уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} \left[\frac{\omega^2}{c^2}-\frac{1-\sigma}{2}\frac{n^2}{R^2}-k^2\right] & -\frac{1+\sigma}{2}k\frac{n}{R} & -\frac{\sigma}{R}ik \\ -\frac{1+\sigma}{2}k\frac{n}{R} & \left[\frac{\omega^2}{c^2}-\frac{1-\sigma}{2}k^2-\frac{n^2}{R^2}\right] & -\frac{in}{R^2} \\ \frac{\sigma}{R}ik & \frac{in}{R^2} & \left[\frac{\omega^2}{c^2}-\frac{h^2}{12}\left(k^2+\frac{n^2}{R^2}\right)^2-\frac{1}{R^2}\right] \end{vmatrix}=0. \tag{12}$$

Здесь приняты такие же обозначения, как и в работе [1]. Из уравнения (12) [2] следует, что для осесимметричных волн условие излучения выполняется во всем частотном диапазоне только для сдвиговой волны (кручение оболочки). Для продольной осесимметричной волны почти во всем диапазоне частот, кроме небольшой области частот $\frac{\omega}{c}R\sim 1$, там, где стержневая продольная волна переходит в осесимметричную изгибную, а оболочечная продольная волна еще не появилась. В этих двух волнах нормальное смещение w очень мало (оно является как бы побочным эффектом, обусловленным коэффициентом Пуассона). Кроме того, входной импеданц для данных волн много больше входного импеданца для волн типа изгиба.

Если ограничиться рассмотрением частотной области $\frac{\omega}{c}R<1$, то бегущими нормальными волнами в этой области [2], кроме упомянутых выше волн, имеющих очень малое смещение w, будут волны типа изгиба, имеющие преобладающее смещение по нормали.

Для определения области частот, где для волн типа изгиба выполняется условие излучения, разложим дисперсионное уравнение (12) по степеням k вблизи точек $k = 0$ и ограничимся членами порядка k^2. Тогда получим

$$k^2 = \frac{2}{1-\sigma} n^2 \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{h^2}{12} \frac{n^2}{R^2} \frac{(n^2-1)}{R^2} \right). \tag{13}$$

Частотная область излучения определяется из условия

$$\frac{2}{1-\sigma} n^2 \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{h^2}{12} \frac{n^2}{R^2} \frac{(n^2-1)}{R^2} \right) - k_{\text{ср}}^2 < 0. \tag{14}$$

Частоты, удовлетворяющие условию (14), являются околорезонансными частотами поперечных резонансов. Амплитуды колебаний на этих частотах при постоянных силах резко возрастают.

В заключение следует отметить, что звуковое поле замкнутой цилиндрической оболочки на низких частотах $\frac{\omega}{c} R \ll 1$, по-видимому, обусловлено изгибными волнами и вибродемпфирование, бесполезное для продольных и сдвиговых волн, даст существенный эффект в снижении вибраций и звукового поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. К. Коненков, Р. Н. Михайлов. О нормальных волнах в полосе с поперечной кривизной. Акуст. ж., 1968, 14, 1, 72—77.
2. Р. Н. Михайлов. О распространении и затухании нормальных волн в замкнутой цилиндрической оболочке. Сб. «Вибрации и шумы». М., «Наука», 1969, 35—43.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступило в редакцию
28 августа 1969 г.

УДК 534.222.2

О ПОГРЕШНОСТИ РАСЧЕТА ВОЛНЫ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ, ИЗЛУЧАЕМОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ КАВЕРНОЙ, В ПРИБЛИЖЕНИИ КИРКВУДА — БЕТЕ

В. П. Морозов

При решении некоторых задач нелинейной акустики, например, для расчета волн, образующихся при замыкании кавитационных полостей, или при электрическом разряде в жидкости находит применение гипотеза Кирквуда — Бете [1], позволяющая решить задачу в более высоком приближении, нежели акустическое или квазиакустическое. Гипотеза Кирквуда — Бете представляет собой пример эвристического подхода к решению задачи. Представления, положенные в ее основу, являются в значительной мере интуитивными, в силу этого погрешность решения не может быть оценена аналитически, например, путем оценки порядка величины отброшенных членов, и чтобы судить о границах ее применимости необходимо сопоставление с точным решением.

Возможность расчета движения стенки пузырька по Кирквуду и Бете была показана путем сопоставления точного и приближенного решения в работах [2, 3]. В данной работе найдена погрешность расчета волны сжатия, которая накапливается как вследствие приближенного определения движения границы пузырька, так и из-за приближенного характера расчета поля скоростей и давлений вокруг него. Приближенный расчет по Кирквуду — Бете сравнивается с результатом численного интегрирования точных уравнений [2]. Закон движения стенки каверны определялся из уравнения

$$R\frac{dU}{dt}\left(1-\frac{U}{c}\right)+\frac{3}{2}U^2\left(1-\frac{U}{3c}\right)=H\left(1+\frac{U}{c}\right)+\frac{R}{c}\frac{dH}{dt}\left(1-\frac{U}{c}\right), \tag{1}$$

справедливого в рамках гипотезы Кирквуда — Бете [3]. Предполагалось, что давление внутри каверны P изменяется по адиабатическому закону: $P = P_0 \cdot \left(\frac{R}{R_0}\right)^{-4,2}$.

Подробности расчета замыкания сферической каверны можно найти в работе [3]. Решение уравнения (1) позволяет получить начальные условия для расчета излучае-