УДК 534.222

О СПЕКТРАХ ИНТЕНСИВНЫХ ШУМОВ

В. П. Кузнецов

Известно, что в процессе распространения возмущений конечных амплитуд наблюдается некоторое изменение спектров, зависящее в общем случае от характера возмущения. Ниже показано, что нелинейные явления при распространении таких возмущений являются определяющими в формировании высокочастотной области спектра. Они приводят к некоторому универсальному виду спектральной плотности независимо от характера спектра источника. В то же время низкочастотная область спектра полностью определяется спектром источника.

Для плоской волны конечной амплитуды можно воспользоваться известным решением Римана [1]:

$$u(t, x) = f\left[t - \frac{x}{c + u(t, x)}\right],$$

где $u(t, x)$ — скорость жидкости в точке x в момент времени t, $f(z)$ — произвольная функция. При малых числах Маха ($M < 1$) в адиабатическом случае можно положить

$$u(t, x) = f[y + \alpha x u(t, x)], \tag{1}$$

где

$$y = t - x / c_0, \qquad \alpha = (\gamma + 1) / 2c_0^2, \qquad \gamma = C_p / C_v.$$

В случае симметричных сферических или цилиндрических полей соответственное решение записывается следующим образом [2]:

$$v_ц(y, r) = \sqrt{r / r_0} \cdot u_ц(y, r), \qquad \varphi_ц(r, r_0) = 2\alpha r_0 (\sqrt{r / r_0} - 1). \tag{2}$$

где

$$v_{сф}(y, r) = r / r_0 \cdot u_{сф}(y, r), \qquad \varphi_{сф}(r, r_0) = \alpha r_0 \ln [r / r_0],$$

$$v_ц(y, r) = \sqrt{r / r_0} \cdot u_ц(y, r), \qquad \varphi_ц(r, r_0) = 2\alpha r_0 (\sqrt{r / r_0} - 1).$$

Результаты, полученные ниже, будут справедливы и для этих типов полей при соответствующей коррекции. Напишем Фурье-преобразование выражения (1)

$$S(\omega, x) = \int_{-\infty}^{\infty} u(y, x) e^{-i\omega y}\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)[1 - \alpha x f'(z)]\, e^{-i\omega[z - \alpha x f(z)]}\, dz. \tag{3}$$

После интегрирования по частям мы получаем

$$S(\omega, x) = \frac{1}{i\omega} \int_{-\infty}^{\infty} f'(z) \cdot e^{i\omega\alpha x f(z)} \cdot e^{-i\omega z}\, dz. \tag{4}$$

Отсюда видно, что при значениях частоты $\omega \leqslant 1 / \alpha x |f|$ или на расстояниях от источника $x \leqslant 1 / \alpha\omega |f|$ спектр $S(\omega, x)$ близок к спектру функции $f(z)$. Другими словами, нелинейные искажения в низкочастотной области спектра наименее заметны. Отсюда же следует условие применимости линейного приближения в недиссипативной среде $|f| \leqslant 1 / \alpha x\omega$.

Проведя в формуле (4) интегрирование по частям, мы получаем с точностью до постоянной

$$S(\omega, x) = \frac{1}{i\omega\alpha x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega[\alpha x f(z) - z]}\, dz. \tag{5}$$

Для больших значений частоты ($\omega \to \infty$) интеграл в формуле (5) можно оценить по методу стационарной фазы:

$$S(\omega, x) \approx \frac{1}{i\omega\alpha x} \sqrt{\frac{2\pi}{\omega\alpha x f''(z_0)}} \cdot e^{i\omega[\alpha x f(z_0) - z_0 \pm \pi/4]}, \tag{6}$$

откуда мы получаем модуль спектра

$$|S(\omega, x)| \sim c \cdot \omega^{-3/2} \tag{7}$$

и спектр интенсивности

$$\langle |S(\omega, x)|^2 \rangle \sim \langle c^2 \rangle \cdot \omega^{-3}, \tag{8}$$

где c — коэффициент, не зависящий от частоты.

Таким образом, влияние нелинейных искажений в высокочастотной области спектра настолько велико, что приводит к формированию универсального вида спектра, независимо от характера спектра источника возмущений.

В заключение отметим следующий факт. При изучении спектра шума, излучаемого изотропной турбулентностью, в работе [3] на основе известной модели Лайтхилла получены результаты о характере распределения энергии шума по спектру, по существу совпадающие с выводами, полученными здесь. В рамках предположений, сделанных в работе [3], характер зависимости в высокочастотной области спектра (c, $\omega^{-7/2}$) является универсальным и не зависит от природы сил, вынуждающих турбулентное движение, в то же время спектр низкочастотного шума зависит от крупномасштабных вихрей и не может определяться универсальным образом. По-видимому, такое совпадение при описании различных нелинейных явлений не случайно, а является результатом некоторой общности динамики нелинейных взаимодействий в механике сплошных сред.

Автор благодарит Р. В. Хохлова за полезное обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Механика сплошных сред. М., ГТТИ, 1953.
2. R. V. Khokhlov, K. A. Naugolnych, S. I. Solyan. Waves of moderate amplitudes in absorbing media. Acustica, 1964, **14**, 5, 248—253.
3. W. Meecham, G. Ford. Acoustic radiation from isotropic turbulence. J. Acoust. Soc. America, 1958, **30**, 318.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступило в редакцию
10 февраля 1969 г.

УДК 534.231.3

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ ИМПЕДАНЦ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПО ОТНОШЕНИЮ К ТОЧЕЧНОЙ СИЛЕ

В. Т. Ляпунов, Т. Д. Рожинова

Концепция характеристического импеданца многорезонансных колебательных систем, предложенная Скучиком [1], позволяет получить некоторое осредненное значение механического сопротивления системы (среднее между его максимальными и минимальными значениями на резонансах и антирезонансах соответственно), знание которого может быть использовано при приближенной оценке взаимодействия системы, в частности оболочки, с различными присоединенными к ней конструкциями (например сосредоточенными массами). Физически такое сопротивление соответствует случаю достаточно большой конструкции, когда резонансов настолько много, что резонансные кривые соседних мод перекрываются.

Рассмотрим задачу о гармонических колебаниях ограниченной по длине круговой цилиндрической оболочки (l — длина оболочки, R — радиус) под действием гармонической сосредоточенной силы частоты ω. Зависимость от времени вида $\exp(+i\omega t)$ в дальнейшем для краткости опускается. Вынужденные колебания оболочки и возмущающее усилие, как обычно [2, 3], представим в виде ряда по собственным функциям колебаний оболочки $\psi_{mn}(x, y)$ (x, y — текущие координаты по оси и окружности оболочки):

$$\dot{W} = i\omega \sum_{mn} \frac{P_{mn}\psi_{mn}(x, y)}{M[\omega_{mn}^2(1+i\eta)-\omega^2]} \tag{1}$$

где W — колебательная скорость оболочки в направлении радиуса, m — число полуволн в направлении оси, n — число волн по окружности, M — масса оболочки на единицу площади поверхности ω_{mn} — собственные частоты, η — коэффициент потерь, P_{mn} — коэффициент разложения возмущающего усилия. Задав сосредоточенную в точке x_0, y_0 силу как распределение давлений по поверхности оболочки в виде δ-функции $P(x, y) = F_0\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)$, получим $P_{mn} = \psi_{mn}(x_0, y_0)4F_0/S$ (S — площадь поверхности оболочки) и выражение для механического сопротивления оболочки

$$Z_0(x_0, y_0; x, y) = \frac{S}{4i\omega}\left\{\sum_{m,n} \frac{\psi_{mn}(x, y)\psi_{mn}(x_0, y_0)}{M[\omega_{mn}^2(1+i\eta)-\omega^2]}\right\}^{-1}. \tag{2}$$