5. Б. Сейдж, Г. Ример. Некоторые методы экспериментального изучения равновесия жидкость — пар. В сб. «Фазовые равновесия легких углеводородов», М., Гостоптехиздат, 1958, 52—65.
6. А. В. Сторонкин, А. Г. Морачевский. О равновесии раствор — пар в системе бензол — циклогексан — изопропиловый спирт. Ж. физ. хим., 1956, 30, 6, 1297—1307.

Тульский государственный
педагогический институт
им. Л. Н. Толстого

Поступило в редакцию
3 марта 1969 г.

УДК 534.21

К ВОПРОСУ О РАЗДЕЛИМОСТИ ВЕКТОРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

О. И. Гроссман, А. А. Клещёв

Известно [1], что векторное волновое уравнение

$$(\Delta + k^2)\mathbf{A} = 0 \tag{1}$$

разделяется в шести из одиннадцати координатных систем, допускающих разделение скалярного волнового уравнения. Этот факт являлся препятствием для применения метода разделения переменных в задачах дифракции звуковых волн на упругих сфероидальных (вытянутых и сплющенных) и параболических телах вращения. Однако в осесимметричном случае удается произвести разделение переменных в уравнении (1) в трех координатных системах вращения (вытянутой сфероидальной, сплющенной сфероидальной и параболической), поскольку векторный потенциал обладает при этом лишь одной компонентой

$$\mathbf{A} = A_\varphi \cdot \mathbf{e}_\varphi, \tag{2}$$

где φ — угловая координата вращения, $\mathbf{e}_\varphi$ — ее орт. Покажем справедливость этого утверждения на примере системы вытянутых сфероидальных координат вращения. Если x, y, z — декартовы координаты с началом в центре системы, а ξ, η, φ — вытянутые сфероидальные координаты, то связь между ними определяется соотношениями:

$$x = h_0 \cdot (1-\eta^2)^{1/2} \cdot (\xi^2-1)^{1/2} \cdot \cos\varphi,$$
$$y = h_0 (1-\eta^2)^{1/2} \cdot (\xi^2-1)^{1/2} \cdot \sin\varphi, \quad z = h_0 \cdot \eta \cdot \xi,$$

где h_0 — половина фокусного расстояния. Координаты ξ, η, φ изменяются в пределах $-1 \leqslant \eta \leqslant 1$, $1 \leqslant \xi < \infty$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, а масштабные множители задаются выражениями:

$$h_\xi = h_0 \cdot (\xi^2-\eta^2)^{1/2} \cdot (\xi^2-1)^{-1/2}, \quad h_\eta = h_0 \cdot (\xi^2-\eta^2)^{1/2} \cdot (1-\eta^2)^{-1/2},$$
$$h_\varphi = h_0 \cdot (1-\eta^2)^{1/2} \cdot (\xi^2-1)^{1/2}.$$

Учтя осевую симметрию (2), раскроем волновое уравнение (1):

$$\left[\frac{\partial}{\partial\xi}(\xi^2-1)\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\partial}{\partial\eta}(1-\eta^2)\frac{\partial}{\partial\eta} - \frac{\xi^2-\eta^2}{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}\right] A^\varphi + (\xi^2-\eta^2) h_0^2 \cdot k^2 \cdot A_\varphi = 0 \tag{3}$$

Полагая $A_\varphi = \Psi(\xi) \cdot \Theta(\eta)$, разделим переменные в уравнении (3):

$$\left[\frac{d}{d\xi}(\xi^2-1)\frac{d}{d\xi} - \frac{1}{\xi^2-1} - \lambda_{1,n} + c^2 \cdot \xi^2\right] \Psi(\xi) = 0, \tag{4}$$

$$\left[\frac{d}{d\eta}(1-\eta^2)\frac{d}{d\eta} - \frac{1}{1-\eta^2} + \lambda_{1,n} - c^2 \cdot \eta^2\right] \Theta(\eta) = 0. \tag{5}$$

Здесь $c = h_0 \cdot k$, а $\lambda_{1,n} = \lambda_{1,n}(c)$ — постоянная разделения. Уравнениям (4) и (5) удовлетворяют соответственно радиальные $R^{(1),(2)}_{m,n}(c, \xi)$ и угловые $S^{(1),(2)}_{m,n}(c, \eta)$ сфероидальные функции с индексом $m = 1$. Следовательно, фундаментальными решениями уравнения (3) будут произведения сфероидальных функций вида $S^{(1),(2)}_{1,n}(c,\eta) \cdot R^{(1),(2)}_{1,n}(c, \xi)$. Угловые функции второго рода $S^{(2)}_{m,n}(c, \eta)$ обычно не рассматриваются, так как они имеют особенности в точках $\eta = \pm 1$; во внутренней области не используются радиальные функции второго рода $R_{m,n}(c, \xi)$, расходящиеся на линии эксцентриситета $\xi = 1$. Заметим, что и для сплющенных сфероидальных координат также нельзя пользоваться во внутренних задачах радиальными функциями второго рода $\overset{(2)}{R}_{m,n}(-ic, i\xi)$ (по-прежнему $c = h_0 \cdot k$), хотя особые точки их лежат вне физической области значений ξ. В этом случае обращаются в бесконечность производные по нормалям n_ξ и n_η от произведения $F = \overset{(1)}{S}_{m,n}(-ic, \eta) \cdot \overset{(2)}{R}_{m,n}(-ic, i\xi)$ в точках фокальной окружности $\xi = 0$, $\eta = 0$. Действительно,

$$\frac{\partial F}{\partial n_\xi} = \overset{(1)}{S}_{m,n}(-ic, \eta) \cdot \frac{d\overset{(2)}{R}_{m,n}(-ic, i\xi)}{d\xi} \cdot (h_\xi)^{-1}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial F}{\partial n_\eta} = \overset{(2)}{R}_{m,n}(-ic, i\xi) \cdot \frac{d\overset{(1)}{S}_{m,n}(-ic, \eta)}{d\eta} \cdot (h_\eta)^{-1}. \tag{7}$$

При $m-n$—четном в точках $\xi=0$, $\eta=0$ выражение (6) обращается в бесконечность так как $h_\xi = 0$, а $\overset{(1)}{S}_{m,n}(-ic, \eta)$ и $\dfrac{d\overset{(2)}{R}_{m,n}(-ic, i\xi)}{d\xi}$ отличны от нуля. Когда $m - n$ нечетно, то в этих же точках $\xi = 0$, $\eta = 0$ обращается в бесконечность правая часть равенства (7) ввиду того, что $h_\eta = 0$, а $\overset{(2)}{R}_{m,n}(-ic, i\xi)$ и $d\overset{(1)}{S}_{m,n}(-ic, \eta)/d\eta$ отличны от нуля *.

Вектор смещения **S** упругого тела можно представить в виде комбинации скалярного (Ф) и векторного (**A**) потенциалов [1]: $\mathbf{S} = -\mathrm{grad}\,\Phi + \mathrm{rot}\,\mathbf{A}$.

В осесимметричной задаче с вытянутой сфероидальной границей фундаментальными решениями скалярного волнового уравнения для потенциала $(\Delta + k_0^2)\Phi = 0$ будут сфероидальные функции $\overset{(1),(2)}{S}_{m,n}(c, \eta)$ и $\overset{(1),(2)}{R}_{m,n}(c, \xi)$ с индексом $m = 0$.

Возможность разделения переменных в векторном волновом уравнении позволяет получить строгое решение осесимметричной задачи дифракции звуковой волны на упругих телах с аналитическими поверхностями в системе сфероидальных и параболических координат вращения.

Авторы благодарят И. И. Клюкина за обсуждение результатов и интерес, проявленный к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. М. Морз и Г. Фешбах. Методы теоретической физики, т. 2. М., ИЛ, 1960.
2. К. Фламмер. Таблицы волновых сфероидальных функций. М., Гостехиздат, 1962.
3. Е. В. Гобсон. Теория сферических и эллипсоидальных функций. М., ИЛ, 1952.

Ленинградский кораблестроительный институт

Поступило в редакцию 29 января 1969 г.

УДК 534.6

ПРИМЕНЕНИЕ НЕЧЕТНЫХ ГАРМОНИК ПЬЕЗОИЗЛУЧАТЕЛЯ В УЛЬТРАЗВУКОВОМ ИНТЕРФЕРОМЕТРЕ ДЛЯ ЖИДКОСТЕЙ

В. Илгунас, К. Паулаускас, А. Тамашаускас

Интерферометрические методы исследования дают возможность одновременного измерения скорости и поглощения ультразвука в веществах, причем скорость определяется с точностью до 0,002% [1, 2], а поглощение — (3—8)% [3]. Эта возможность особенно ценна при комплексных исследованиях в молекулярной акустике, так как скорость и поглощение определяются для одного и того же состава вещества при одинаковых условиях.

До сих пор для интерферометрических измерений применялась главным образом основная частота пьезоизлучателя. При этом для исследования веществ в неко-

* Приводимое рассуждение аналогично тому, которое развивает Гобсон [3] при разложении гармонического потенциала во внутренней области сплющенных сфероидальных координат.