

ростей может быть принят нормальным

$$f(A_c, A_s) = \frac{1}{2\pi \sqrt{D_1 D_2 - K^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(D_1 D_2 - K^2)} [(A_c - m_1)^2 D_2 - 2K(A_c - m_1)(A_s - m_2) + (A_s - m_2)^2 D_1] \right\}. \quad (4)$$

Если амплитуда и фазы потенциалов скоростей отдельных излучателей подчиняются нормальному закону распределения и $D_a = \exp D_\psi - 1$, то $c_1 = c_2$ и $D_1 = D_2 = D$, а $K = 0$. Выражение (4) в этом случае принимает вид

$$f(A_c, A_s) = \frac{1}{2\pi D} \exp \left\{ -\frac{(A_c - m_1)^2 + (A_s - m_2)^2}{2D} \right\}. \quad (5)$$

Положив в формуле (5) $A_c = A \cos \xi$, $A_s = A \sin \xi$ и проведя интегрирование по ξ , получаем закон распределения амплитуды потенциала скоростей:

$$f(A) = \frac{A}{D} e^{-\frac{A^2 + a^2}{2D}} J_0 \left(\frac{a}{D} A \right), \quad (6)$$

где $a^2 = m_1^2 + m_2^2$, $J_0 \left(\frac{a}{D} A \right)$ — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка. Выражение (6) представляет собой обобщенный закон распределения Рэлея со следующими числовыми характеристиками:

$$m_A = \sqrt{\frac{\pi D}{2}} e^{-\frac{a^2}{2D}} \left[\left(1 + \frac{a^2}{2D} \right) J_0 \left(\frac{a^2}{4D} \right) + \frac{a^2}{2D} J_1 \left(\frac{a^2}{4D} \right) \right],$$

$$D_A = 2D \left\{ 1 + \frac{a^2}{2D} - \frac{\pi}{4} e^{-\frac{a^2}{2D}} \left[\left(1 + \frac{a^2}{2D} \right) J_0 \left(\frac{a^2}{4D} \right) + \frac{a^2}{2D} J_1 \left(\frac{a^2}{4D} \right) \right]^2 \right\}.$$

Выводы

1. Потенциал скоростей, создаваемый системой излучателей, является комплексной случайной величиной, действительная и мнимая составляющие которой подчиняются двумерному нормальному закону распределения.

2. Закон распределения амплитуды потенциала скоростей при соответствующем соотношении между разбросом амплитуд и фаз потенциала скоростей отдельных излучателей может быть сведен к обобщенному релеевскому. Это позволяет определить числовые характеристики амплитуды потенциала скоростей системы излучателей по известным числовым характеристикам амплитуд и фаз отдельных излучателей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. В. Гнеденко. Курс теории вероятностей. М., «Наука», 1965.
2. С. Н. Бернштейн. Распространение предельной теоремы теории вероятностей на суммы зависимых величин. Собр. соч., т. IV. М., «Наука», 1964.

Таганрогский радиотехнический институт

Поступило в редакцию
28 декабря 1967 г.

УДК 534.121.1

О ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ТОНКОЙ ПЛАСТИНЫ С ЖЕСТКИМ ДИСКОМ

В. Т. Ляпунов

Задача о колебаниях пластины с жестким диском возникает в тех случаях, когда пластина подкреплена либо в районе приложения возмущающих усилий, либо в месте расположения измерительных датчиков, антивибраторов и пр. Имеющиеся решения [1—4] применимы лишь при размерах подкрепления малых по сравнению с длиной изгибной волны.

Рассмотрим возбуждение бесконечной пластины, в которую жестко вмонтирован диск массы M и радиуса a , предполагаемый недеформируемым. Пусть к диску в цент-

ре приложена поперечная сила $F \exp(i\omega t)$. Временной множитель $\exp(i\omega t)$ в дальнейшем для краткости опускаем. На кромке пластины по контуру диска мы имеем условия:

$$Q_r \cdot 2\pi a = F + \omega^2 MW, \quad \partial W / \partial r = 0, \quad (1)$$

где W — поперечные смещения сечений пластины, $Q_r = D \left\{ \frac{\partial^3 W}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial W}{\partial r} \right\}$ — перерезывающие силы в сечениях пластины, D — ее цилиндрическая жесткость. Два других граничных условия характеризуют убывание амплитуды колебаний пластины на «бесконечности» до нуля и отсутствие волн, пришедших из «бесконечности». В этом случае решение дифференциального уравнения изгибных колебаний тонкой пластины в цилиндрических координатах принимает вид

$$W(r) = A \left[H_0^{(2)}(kr) - K_0(kr) \frac{H_1^{(2)}(ka)}{K_1(ka)} \right], \quad (2)$$

где k — волновое число изгибных колебаний пластины, $H_n^{(2)}$, K_n — цилиндрические функции в соответственных стандартных обозначениях,

$$A = F \left\{ 4\pi D k^3 a H_1^{(2)}(ka) - \omega^2 M \left[H_0^{(2)}(ka) - K_0(ka) \frac{H_1^{(2)}(ka)}{K_1(ka)} \right] \right\}^{-1}$$

Опуская промежуточные выкладки, напишем окончательное выражение для механического сопротивления пластины с жестким диском:

$$Z_d = Z_0 \cdot q(ka) + i\omega M, \quad (3)$$

где $Z_0 = 8\sqrt{mD}$ — механическое сопротивление бесконечной пластины по отношению к точечной силе и множитель

$$q(ka) = \frac{\pi i}{2} ka \left[\frac{K_0(ka)}{K_1(ka)} - \frac{H_0^{(2)}(ka)}{H_1^{(2)}(ka)} \right]^{-1}$$

характеризует влияние невесомого жесткого диска на механическое сопротивление пластины. График $|q(ka)|$ приведен на фиг. 1 сплошной линией. На низких частотах или при малом диске ($ka \rightarrow 0$) механическое сопротивление пластины с невесомым диском стремится к сопротивлению точечно-возбуждаемой бесконечной пластины. С увеличением радиуса диска (по сравнению с длиной изгибной волны) механическое сопротивление пластины возрастает и при $ka \gg 1$ соответствует механическому сопротивлению бесконечного стержня с шириной, равной половине периметра диска, и толщиной, равной толщине пластины $Z = 2\pi a C_{\text{н}} m (1 + i)$ (здесь $C_{\text{н}}$ — скорость изгибных волн).

Представляет интерес также отношение амплитуд вибраций вдали от точки возбуждения пластины с невесомым диском W_d и без него W_0 . При $kr \gg 1$ и $r \gg a$, получим $d(ka) = W_0 / W_d = -0,5\pi i ka H_1^{(2)}(ka)$. Эта зависимость приведена на фиг. 1 пунктирной кривой.

Учет массы диска показывает, что большой диск ($ka \gg 1$) на высоких частотах ($\omega M \gg Z_0$) более эффективно возбуждает пластину, чем равный по массе точечный груз.

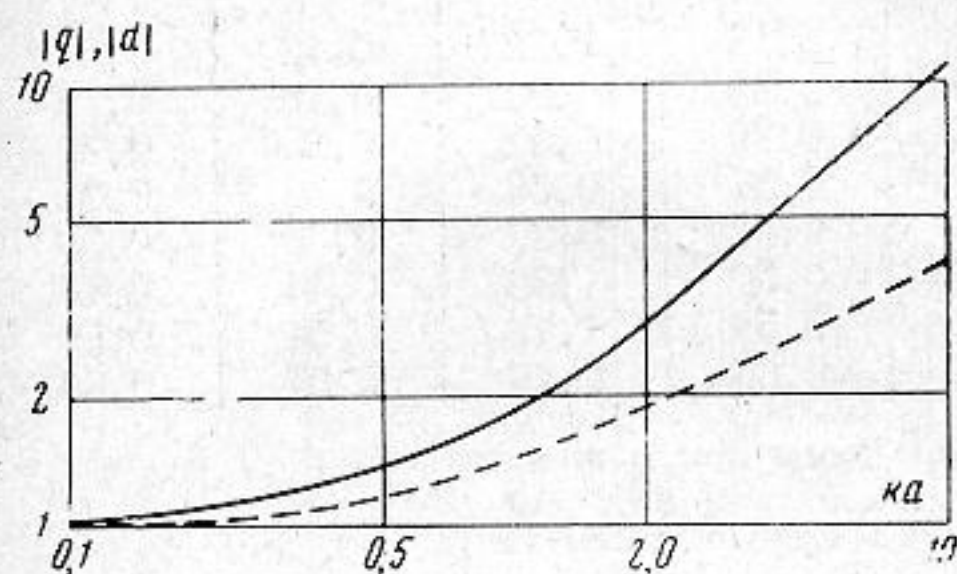
Перейдем к оценке влияния диска на колебания изгиба, распространяющиеся по пластине. Распространяющуюся плоскую волну изгиба $W_f = W_0 \exp(ikr \cos \varphi)$ представим в виде разложения по цилиндрическим волнам

$$W_f = W_0 \left[J_0(kr) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_n(kr) \cos n\varphi \right].$$

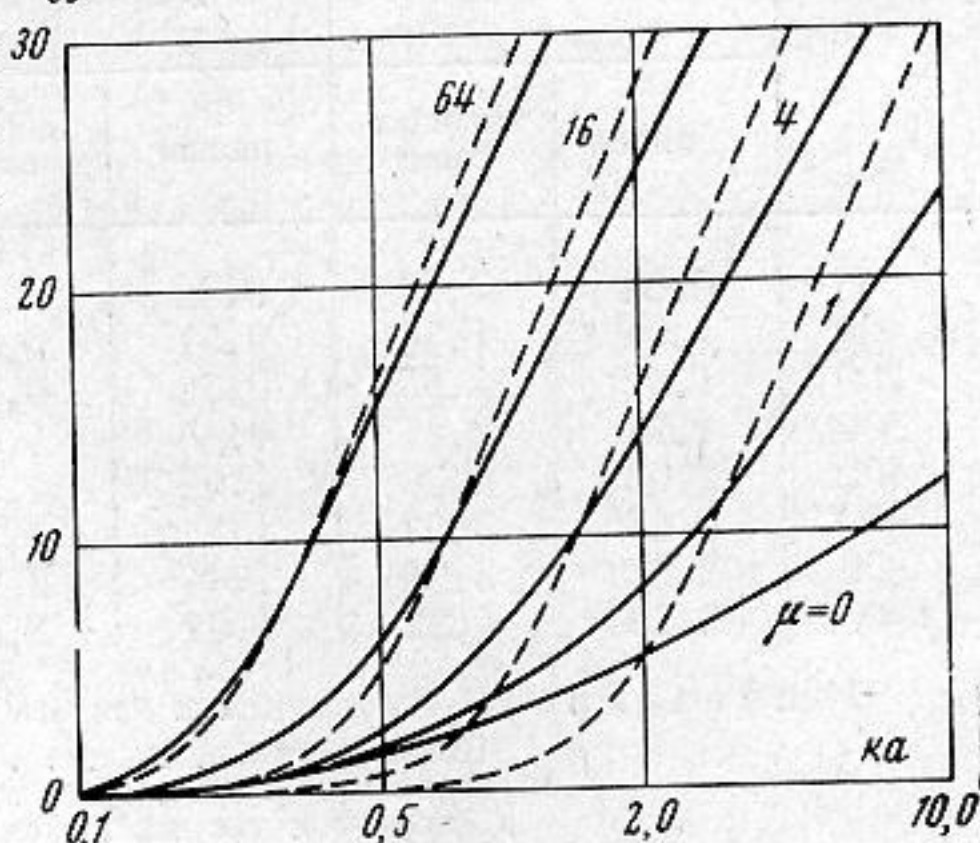
Поле отраженных диском изгибных волн имеет вид $W_r = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n H_n^{(2)}(kr) + B_n K_n(kr) \right] \cos n\varphi$, где A_n и B_n — произвольные постоянные, определяемые из

граничных условий. При рассмотрении только поступательных движений диска, для суммарных перемещений пластины $W = W_f + W_r$, условия (1) сохраняют силу, причем $F = 0$, а в выражениях для W_f и W_r достаточно удержать лишь слагаемые, у которых $n = 0$.

Найдя из условий (1) постоянные A_0 и B_0 , определим ослабление амплитуды колебаний пластины в месте установки виброметра, которое будет равно $20 \lg |\gamma|$,



Фиг. 1



Фиг. 2

где $\gamma = \frac{Z_a \cdot d(ka)}{Z_0 \cdot q(ka)}$. Для практических расчетов это выражение можно переписать

в виде

$$\gamma = \frac{\pi i}{8} (ka)^2 \left\{ \mu H_0^{(2)}(ka) - H_1^{(2)}(ka) \left[\frac{4}{ka} + \mu \frac{K_0(ka)}{K_1(ka)} \right] \right\},$$

где $\mu = M / (\rho a^2 t)$ — безразмерный параметр, характеризующий отношение массы диска к массе занимаемого им участка пластины. Результаты расчета локального ослабления амплитуды колебаний пластины представлены на фиг. 2 в децибелах сплошными линиями для нескольких значений параметра μ . Сравнение с расчетом, применяемым в настоящее время в предположении, что измерительные датчики представляют точечную нагрузку (пунктирные линии на фиг. 2), показывает, что для легких датчиков искажающий эффект проявится на более низких частотах. Однако в области развитого эффекта локального ослабления суммарная поправка оказывается меньше, чем для точечного груза.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. Thomas. Characteristic impedances for flexure waves in thin plates. J. Acoust. Soc. America, 1958, 30, 3, 220—221.
2. И. И. Ключкин. О влиянии виброметра на движение колеблющейся поверхности. Акуст. ж., 1959, 4, 1, 38—44.
3. Б. Г. Корнев. Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в Бесселевых функциях. М., Физматгиз, 1960.
4. И. И. Ключкин, Ю. Д. Сергеев. О рассеянии изгибных волн антивибраторами, установленными на пластине. Акуст. ж., 1964, 10, 1, 60—65.

Ленинград

Поступило в редакцию
26 сентября 1968 г.

УДК 534.286

К ВОПРОСУ О ЗАТУХАНИИ АКУСТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В СЛОЕ КРУПНОЗЕРНИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ

Я. И. Магун, В. Т. Плицын, Г. П. Сенкевич, Б. С. Филалов

Затухание акустических колебаний в слое крупнозернистых материалов, особенно при наличии газового потока, протекающего через слой, в настоящее время изучено еще недостаточно. Решение этого вопроса позволит оценить целесообразность применения акустических колебаний для интенсификации процессов горения, восстановления, тепло- и массообмена. В данной работе экспериментально определены ко-