УДК 534.874.1

К ВОПРОСУ О СТАТИСТИКЕ ЗВУКОВОГО ПОЛЯ СИСТЕМЫ ИЗЛУЧАТЕЛЕЙ

В. Н. Зуев, Л. Ф. Лепендин

Звуковое поле системы излучателей зависит от распределения амплитуд и фаз колебательных скоростей отдельных излучателей. Однако поскольку практически невозможно изготовить большое число совершенно идентичных излучателей или точно осуществить заданное распределение амплитуд и фаз отдельных излучателей, звуковое поле, создаваемое системой излучателей, будет в определенной мере случайным. Ниже рассматривается влияние разброса амплитуд и фаз потенциалов скоростей, создаваемых отдельными излучателями, на потенциал скоростей системы излучателей.

Потенциал скоростей, создаваемый одним излучателем (в дальнем поле), представим в виде

$$U_i(\theta) = E_i(\theta)\, e^{j\beta_i(\theta)}, \tag{1}$$

где $E_i(\theta)$ — амплитуда, $\beta_i(\theta)$ — фаза потенциала скоростей. Обычно за расчетные значения амплитуд и фаз потенциала скоростей берут средние значения, т. е. математические ожидания $M[E_i] = A_i$ и $M[\beta_i] = \varphi_i$. Выражение (1) при этом можно представить в виде $U_i(\theta) = a_i A_i(\theta)\, e^{j[\varphi_i(\theta)+\psi_i]}$, где $a_i = E_i(\theta) / A_i(\theta)$ — случайная величина, учитывающая разброс амплитуд, а $\psi_i = \beta_i(\theta) - \varphi_i(\theta)$ — случайная величина, учитывающая разброс фаз. Потенциал скоростей системы излучателей, на основе принципа суперпозиции, будет

$$U(\theta) = \sum_{i=1}^{n} U_i(\theta) = \sum_{i=1}^{n} a_i A_i(\theta)\, e^{j[\varphi_i(\theta)+\psi_i]} \tag{2}$$

и представляет собой комплексную случайную величину: $U(\theta) = A_c(\theta) + jA_s(\theta) = A(\theta)\, e^{j\gamma(\theta)}$, где $A_c(\theta) = \sum_{i=1}^{n} a_i A_i \cos[\varphi_i(\theta) + \psi_i]$ — действительная составляющая, $A_s(\theta) = \sum_{i=1}^{n} a_i A_i(\theta) \sin[\varphi_i(\theta) + \psi_i]$ — мнимая составляющая. Для определения числовых значений A_c и A_s можно воспользоваться теоремами о числовых характеристиках случайных величин [1]. Выражения для определения математического ожидания и корреляционной матрицы имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}
m_1(\theta) &= M[A_c(\theta)] = m_c m_a \sum_i A_i(\theta) \cos\varphi_i(\theta),\\
m_2(\theta) &= M[A_s(\theta)] = m_c m_a \sum_i A_i(\theta) \sin\varphi_i(\theta),\\
D_1(\theta) &= D[A_c(\theta)] = c_1 \textstyle\sum_{11}(\theta) + c_2 \sum_{22}(\theta),\\
D_2(\theta) &= D[A_s(\theta)] = c_2 \textstyle\sum_{11}(\theta) + c_1 \sum_{22}(\theta),\\
K(\theta) &= K[A_c(\theta), A_s(\theta)] = (c_1 - c_2) \textstyle\sum_{12}(\theta),
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где $m_c = M[\cos\psi_i]$, $m_a = M[a_i]$, $c_1 (m_a^2 + D_a) D_c + m_c^2 D_a$, $c_2 = (m_a^2 + D_a) D_s$, $D_a = D[a_i]$, $D_c = D[\cos\psi_i]$,

$$\Sigma_{11}(\theta) = \sum_i A_i^2(\theta) \cos^2\varphi_i(\theta), \qquad \Sigma_{22}(\theta) = \sum_i A_i^2(\theta) \sin^2\varphi_i(\theta),$$

$$\Sigma_{12}(\theta) = \sum_i A_i^2(\theta) \sin\varphi_i(\theta) \cos\varphi_i(\theta).$$

В соответствии с теоремой Бернштейна о суммах зависимых случайных величин [2], закон распределения действительной и мнимой составляющих потенциала скоростей может быть принят нормальным

$$f(A_c, A_s) = \frac{1}{2\pi\sqrt{D_1 D_2 - K^2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2(D_1 D_2 - K^2)} \left[(A_c - m_1)^2 D_2 - 2K(A_c - m_1)(A_s - m_2) + (A_s - m_2)^2 D_1 \right] \right\}. \tag{4}$$

Если амплитуда и фазы потенциалов скоростей отдельных излучателей подчиняются нормальному закону распределения и $D_a = \exp D_\psi - 1$, то $c_1 = c_2$ и $D_1 = D_2 = D$, а $K = 0$. Выражение (4) в этом случае принимает вид

$$f(A_c, A_s) = \frac{1}{2\pi D} \exp\left\{ -\frac{(A_c - m_1)^2 + (A_s - m_2)^2}{2D} \right\}. \tag{5}$$

Положив в формуле (5) $A_c = A \cos \xi$, $A_s = A \sin \xi$ и проведя интегрирование по ξ, получаем закон распределения амплитуды потенциала скоростей:

$$f(A) = \frac{A}{D} e^{-\frac{A^2 + a^2}{2D}} J_0\left(\frac{a}{D} A\right), \tag{6}$$

где $a^2 = m_1^2 + m_2^2$, $J_0\left(\frac{a}{D} A\right)$ — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка. Выражение (6) представляет собой обобщенный закон распределения Рэлея со следующими числовыми характеристиками:

$$m_A = \sqrt{\frac{\pi D}{2}} e^{-\frac{a^2}{2D}} \left[\left(1 + \frac{a^2}{2D}\right) J_0\left(\frac{a^2}{4D}\right) + \frac{a^2}{2D} J_1\left(\frac{a^2}{4D}\right) \right],$$

$$D_A = 2D \left\{ 1 + \frac{a^2}{2D} - \frac{\pi}{4} e^{-\frac{a^2}{2D}} \left[\left(1 + \frac{a^2}{2D}\right) J_0\left(\frac{a^2}{4D}\right) + \frac{a^2}{2D} J_1\left(\frac{a^2}{4D}\right) \right]^2 \right\}.$$

Выводы

1. Потенциал скоростей, создаваемый системой излучателей, является комплексной случайной величиной, действительная и мнимая составляющие которой подчиняются двумерному нормальному закону распределения.

2. Закон распределения амплитуды потенциала скоростей при соответствующем соотношении между разбросом амплитуд и фаз потенциала скоростей отдельных излучателей может быть сведен к обобщенному релеевскому. Это позволяет определить числовые характеристики амплитуды потенциала скоростей системы излучателей по известным числовым характеристикам амплитуд и фаз отдельных излучателей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. В. Гнеденко. Курс теории вероятностей. М., «Наука», 1965.
2. С. Н. Бернштейн. Распространение предельной теоремы теории вероятностей на суммы зависимых величин. Собр. соч., т. IV. М., «Наука», 1964.

Таганрогский радиотехнический институт

Поступило в редакцию 28 декабря 1967 г.

УДК 534.121.1

О ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ТОНКОЙ ПЛАСТИНЫ С ЖЕСТКИМ ДИСКОМ

В. Т. Ляпунов

Задача о колебаниях пластины с жестким диском возникает в тех случаях, когда пластина подкреплена либо в районе приложения возмущающих усилий, либо в месте расположения измерительных датчиков, антивибраторов и пр. Имеющиеся решения [1—4] применимы лишь при размерах подкрепления малых по сравнению с длиной изгибной волны.

Рассмотрим возбуждение бесконечной пластины, в которую жестко вмонтирован диск массы M и радиуса a, предполагаемый недеформируемым. Пусть к диску в цент-