АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XV 1969 Вып. 4

УДК 534.843.242

О СПЕКТРЕ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ЛИСТОВОГО РЕВЕРБЕРАТОРА

И. А. Ахмедов

Получена формула для определения спектра собственных частот прямоугольной пластины со свободными краями и произведен расчет низших собственных частот стальной пластины размерами $0{,}5 \times 1000 \times \times 2000$ *мм*, применяемой в листовом ревербераторе ЕМТ-140. Выведена формула для расчета плотности спектра собственных частот листового ревербератора. Показано, что характер распределения собственных частот пластины отличается от распределения собственных частот помещения.

Центральным вопросом теории листового ревербератора является исследование структуры спектра собственных частот тонкой прямоугольной пластины, подвешенной по углам к амортизированной раме [1].

Точное решение дифференциального уравнения колеблющейся пластины известно для весьма малого числа граничных условий. Для прямоугольной пластины это, в первую очередь, шарнирно опертые границы [2] и случай двух шарнирно опертых противоположных границ при произвольных условиях на другой паре границ [3]. Для более сложных граничных условий решение можно получить лишь с помощью приближенных методов, например метода Ритца, основанного на вариационном принципе и являющегося конкретизацией прямого метода Рэлея применительно к колебаниям пластин. Метод Рэлея — Ритца дает для собственных частот оценку сверху $\omega_n^p \geqslant \omega_n$, где ω_n^p — n-я частота собственных колебаний, вычисленная по методу Рэлея — Ритца, ω_n — точное значение n-й собственной частоты. Приближение значения тем ближе к истинным собственным частотам, чем удачнее (гибче) выбраны аппроксимирующие функции.

Схема метода Рэлея — Ритца следующая: составляется функция Лагранжа системы

$$L = T - V, \tag{1}$$

где T — кинетическая энергия:

$$T = \frac{1}{2}\rho h \omega^2 \iint W^2(x, y)\, dx\, dy. \tag{2}$$

V — потенциальная энергия:

$$V = \frac{B}{2} \iint \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)^2 + 2\sigma \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \right.$$
$$\left. + 2(1-\sigma)\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\, \partial y}\right)^2\right] dx\, dy. \tag{3}$$

Здесь ρ — плотность материала пластины, h — толщина пластины, B — цилиндрическая жесткость пластины, σ — коэффициент Пуассона, $W(x, y)$ — аппроксимирующая функция, удовлетворяющая граничным условиям.

В качестве аппроксимирующей выбирается функция в форме [4, 5]

$$W = \sum_{m,\, n=1}^{p,\, q} A_{mn} X_m(x) Y_n(y), \tag{4}$$

где $X_m(x)$, $Y_n(y)$ — балочные функции. Условие экстремума будет $\partial L / \partial A_{ik} = 0$, или

$$\frac{\partial V}{\partial A_{ik}} - \frac{\omega^2 \rho h}{2} \frac{\partial}{\partial A_{ik}} \iint W^2(x, y)\, dx\, dy = 0, \tag{5}$$

что приводит к системе алгебраически однородных линейных уравнений порядка pq относительно коэффициентов A_{ik}. Условием разрешимости системы уравнений относительно A_{ik} является равенство нулю ее определителя, из чего находятся pq собственных частот. При этом точность найденных значений частот возрастает в сторону уменьшения их порядкового номера.

Ряд исследований, прежде всего самого Ритца [6], затем [7, 8] показал, что в качестве аппроксимирующих удобно выбирать комбинацию балочных собственных функций, описывающих колебания однородного стержня с соответственно подобранными граничными условиями. В этом случае балочные функции являются решениями уравнения $\varphi^{\mathrm{IV}} = (k^4 / a^4)\varphi$, где a — длина балки, k — волновое число. В нашем случае выполняются граничные условия

$$\varphi^{\mathrm{II}} = \varphi^{\mathrm{III}} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0,\ x = a. \tag{6}$$

Выпишем явно вид балочных функций в зависимости от номера собственных колебаний, следуя работе [7]:

$$\begin{aligned} m = 0 \quad & \varphi(x) = 1, \\ m = 1 \quad & \varphi(x) = 1 - 2x / a. \end{aligned} \tag{7}$$

Эти функции описывают поступательное перемещение и поворот балки как твердого тела. При $m = 2, 4, 6, \ldots$

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \cos k\left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2}\right) + q \operatorname{ch} k\left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2}\right), \\ q &= -\frac{\sin {}^1/_2 k}{\operatorname{sh} {}^1/_2 k}. \end{aligned} \tag{8}$$

Значения k_{2n} определяются из решения следующего дисперсионного уравнения:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} k + \operatorname{th} \frac{1}{2} k = 0. \tag{9}$$

При $m = 3, 5, 7, \ldots$

$$\varphi(x) = \sin k'\left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2}\right) + q' \operatorname{sh} k'\left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2}\right) \tag{10}$$

$$q' = \frac{\sin {}^1/_2 k'}{\operatorname{sh} {}^1/_2 k'}.$$

Значения k'_{2n+1} определяются путем решения дисперсионного уравнения вида

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} k' = \operatorname{th} \frac{1}{2} k'. \tag{11}$$

Балочные функции удовлетворяют условиям ортогональности:

$$\int_0^a \varphi_r \varphi_s \, dx = \begin{cases} a & \text{при} \quad r = s, \\ 0 & \text{при} \quad r \neq s. \end{cases} \tag{12}$$

Кроме того, выполняются соотношения:

$$\int_0^a (\varphi_0^{\text{II}})^2 dx = \int_0^a (\varphi_1^{\text{II}})^2 dx = 0,$$

$$\int_0 \varphi_r^{\text{II}} \varphi_s^{\text{II}} \, dx = \begin{cases} \dfrac{k^4}{a^3} & \text{при} \quad r = s, \\ 0 & \text{при} \quad r \neq s. \end{cases} \tag{13}$$

Обозначим балочную функцию относительно координаты x через $X(x)$, а относительно координаты y через $Y(y)$. Введем далее обозначения:

$$E_{ik} = a \int_0^a X_i X_k^{\text{II}} \, dx, \qquad F_{ik} = b \int_0^b Y_i Y_k^{\text{II}} \, dy,$$

$$H_{ik} = a \int_0^a X_i' X_k' \, dx, \qquad K_{ik} = b \int_0^b Y_i' Y_k' \, dy. \tag{14}$$

В этих обозначениях система алгебраических уравнений относительно A_{mn} примет вид

$$\sum_{m=1} \sum_{n=1} [C_{mn}^{ik} - \lambda \delta_{mn}] A_{mn} = 0. \tag{15}$$

В уравнении (15) приняты следующие обозначения:

$$\lambda = \omega^2 \rho h \frac{b}{B} a^3, \quad \delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad \begin{matrix} i = m \\ k = n, \end{matrix} \\ 0 & \text{при} \quad i \neq m \\ & \text{или при} \quad k \neq n, \end{cases}$$

$$\underset{i,\, k \neq m,\, n}{C_{mn}^{ik}} = \sigma \frac{a}{b} [E_{mi} F_{kn} + E_{im} F_{nk}] + 2(1 - \sigma) \frac{a}{b} H_{im} K_{kn},$$

$$\underset{i,\, k = m,\, n}{C_{mn}^{ik}} = \frac{b}{a} k_i^4 + \frac{a^3}{b^3} k_k^4 + 2\sigma \frac{a}{b} E_{ii} F_{kk} + 2(1 - \sigma) \frac{a}{b} H_{ik} K_{kk},$$

a и b — длина и ширина пластины.

Определитель системы уравнений (15) имеет вид

$$\begin{vmatrix} C_{11}^{11} - \lambda, & C_{12}^{11}, & C_{13}^{11}, \ldots, & C_{pq}^{11} \\ C_{11}^{12}, & C_{12}^{12} - \lambda, & C_{13}^{12}, \ldots, & C_{pq}^{12} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{11}^{pq}, & C_{12}^{pq}, & C_{13}^{pq}, \ldots, & C_{pq}^{pq} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{16}$$

Численный расчет показывает, что диагональные члены в определителе (16) являются главными. Поэтому решение определителя, проведенное методом итераций, дает быстро сходящийся результат.

Таблица 1

m	$G_x = k_m/\pi$	$H_x = (k_m/\pi)^2(1-2/k_m)$	$I_x = (k_m/\pi)^2(1+6/k_m)$	n	$G_y = k_n/\pi$	$H_y = (k_n/\pi)^2(1-2/k_n)$	$I_y = (k_n/\pi)^2(1+6/k_n)$
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	$12/\pi^2$	1	0	0	$12/\pi^2$
2	1,506	1,248	5,017	2	1,506	1,248	5,017
>2	$m-1/2$	$(m-1/2)^2[1-2/(m-1/2)\pi]$	$(m-1/2)^2[1+6/(m-1/2)\pi]$	>2	$n-1/2$	$(n-1/2)^2[1-2/(n-1/2)\pi]$	$(n-1/2)^2[1+6/(n-1/2)\pi]$

Дифференциальное уравнение колебаний пластины напишем в виде

$$B\left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 W}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 W}{\partial y^4}\right)=\rho h\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}. \tag{17}$$

Это уравнение является уравнением экстремали для лагранжиана (1).

Граничные условия для прямоугольной пластины со свободными краями означают равенство нулю на границе изгибающего и крутящего моментов, а также перерезывающих сил. Аналитически указанные граничные условия имеют вид [9]

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\sigma\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}=0,\quad \frac{\partial^3 W}{\partial x^3}+2(1-\sigma)\frac{\partial^3 W}{\partial x\partial y^2}=0 \quad \text{при} \quad x=0,\ x=a,\\ &\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+\sigma\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}=0,\quad \frac{\partial^3 W}{\partial y^3}+2(1-\sigma)\frac{\partial^3 W}{\partial x^2\partial y}=0 \quad \text{при} \quad y=0,\ y=b.\end{aligned} \tag{18}$$

Легко видеть, что если выбрать W в формуле (4) в виде разложения по балочным функциям (8), (10), то граничные условия (18) удовлетворяются вследствие того, что балочные функции удовлетворяют условиям (6).

Выше было отмечено, что главные величины в определителе (16) — диагональные члены. Это означает, что в первом приближении в выражении для собственной функции типа (4) можно ограничиться одним членом суммы: $W_{mn}=X_m(x)Y_n(y)$. Тогда квадрат собственной частоты найдем, подставив W_{mn} в формулу:

$$\omega_{mn}^2=\frac{B/2\iint\left[\left(\frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial y^2}\right)^2+2\sigma\frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial y^2}+2(1-\sigma)\left(\frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right]dx\,dy}{1/2\rho h\iint(W_{mn})^2\,dx\,dy}. \tag{19}$$

В результате для ω_{mn} получим выражение

$$\omega_{mn}=\pi^2\frac{k_{mn}^2}{a^2}\sqrt{\frac{B}{\rho h}}, \tag{20}$$

где

$$k_{mn}^2=\left\{G_x^4+\frac{a^4}{b^4}G_y^4+2\frac{a^2}{b^2}[\sigma H_xH_y+(1-\sigma)I_xI_y]\right\}^{1/2}.$$

Рассчитанные величины G_x, H_x, I_x, G_y, H_y, I_y сведены в табл. 1, при составлении которой учтено, что значения k_m и k_n для балочных функций, определяемые из дисперсионных уравнений (9) и (11), можно получить при $k\gg 1$, используя приближенное условие $\operatorname{th}(k/2)\approx 1$. Это приводит к

Таблица 2

n	f, *гц*				
	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$
1	2,3	6,3	13,2	23,1	35,4
2	3,6	7,8	15,1	25,2	38,2
3	6,5	10,7	17,8	27,6	44,6
4	10,4	14,6	21,3	31,2	50,7
5	14,2	19,1	26,9	37,7	52,6

асимптотическому равенству $k_m \approx (m - {}^1/_2)\pi$. Практически это равенство выполняется уже при $m > 2$.

Результаты расчета собственных частот стальной пластины размерами $0{,}5 \times 1000 \times 2000$ *мм*, применяемой в листовом ревербераторе ЕМТ-140, произведенного для нескольких значений m, n по формуле (20), приведены в табл. 2.

Из выражения (20) и табл. 1 видно, что, начиная с номера m, $n > 10$, влияние граничных условий становится несущественным, и выражение для собственных частот принимает универсальный вид:

$$\omega_{m,\,n} = \pi^2 \sqrt{\frac{B}{\rho h}} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right). \tag{21}$$

Расчеты показывают, что при m, $n = 20$ ошибка в формуле (21) не превышает 5%.

Зависимость (21) позволяет определить число собственных частот прямоугольной пластины со свободными краями, лежащих в интервале частот от 0 до f:

$$N(f) = S \sqrt{\frac{\rho h}{B}} f + \frac{L}{2} \sqrt[4]{\frac{\rho h}{B}} \sqrt{f}. \tag{22}$$

Плотность спектра собственных частот есть производная по f от выражения (22):

$$\frac{\partial N(f)}{\partial f} = \frac{S}{2} \sqrt{\frac{\rho h}{B}} + \frac{L}{4\sqrt{f}} \sqrt[4]{\frac{\rho h}{B}}, \tag{23}$$

где S — площадь, L — периметр пластины, f — некоторая заданная частота.

Как видно из выражения (23), плотность спектра собственных частот пропорциональна площади пластины и обратно пропорциональна ее толщине. Главным членом выражения (23) является первый, отвечающий косым волнам, поскольку второй, соответствующий осевым собственным колебаниям, уменьшается обратно пропорционально $\sqrt{f}$.

Как известно, для помещения величины, определяемые выражениями (22) и (23), рассчитываются по формулам [10]:

$$N(f) \approx \frac{4\pi V}{3C_0^3} f^3 + \frac{\pi S}{4C_0^2} f^2, \tag{24}$$

$$\frac{\partial N(f)}{\partial f} \approx \frac{4\pi V}{C_0^3} f^2 + \frac{\pi S}{2C_0^2} f, \tag{25}$$

где V и S — соответственно объем и площадь помещения.

Произведем расчет количества собственных частот прямоугольной стальной пластины размерами $0{,}5 \times 1000 \times 2000$ *мм* в интервале от 0 до 100 *гц* и определим плотность спектра ее собственных частот при $f_1 = 100$ и $f_2 = 1000$ *гц* по формулам (22) и (23); результаты расчета сведены в табл. 3.

По величине $N(f) = 164$ (при $f_1 = 100$ *гц*) можно заключить, что стальной лист с приведенными выше размерами эквивалентен помещению объемом 1400 $м^3$, с площадью пола 200 $м^2$ и отношением размеров как 2 : 3 : 5.

Из сравнения молекул (23) и (25) и из табл. 3 видно, что характер распределения собственных частот пластины отличается от соответственного

Таблица 3

Показатели	$N(f)$, $0 \div 100$ *гц*	$\partial N(f)/\partial f$, $f_1 = 100$ *гц*	$\partial N(f)/\partial f$, $f_2 = 1000$ *гц*
Стальной лист 0,5×1000×2000 *мм*	164	14	14
Помещение $V = 1400$ $м^3$	164	5	500

распределения собственных частот помещения. Если для помещения плотность спектра собственных частот растет пропорционально f^2, то для прямоугольной пластины со свободными краями она является практически постоянной, не зависящей от частоты, за исключением более низких частот, где она несколько повышается за счет влияния осевых волн.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Kuhl. Über die akustischen und technischen Eigenschaften der Nachhallplatte. Rundfunktechn. Mitt., 1958, 2, 111—116.
2. С. П. Тимошенко. Теория колебаний в инженерном деле. М., ОНТИ, 1934, 82—87.
3. W. Voigt. Göttingen. Nachrichten, 1893, 225—230.
4. G. B. Warburton. The vibration of rectangular plates. Inst. Mech. Eng. Proc., 1954, 168, 12, 371—384.
5. D. Joung. Vibration of rectangular plates by the Ritz method. J. Appl. Mech., 1950, 17, 4, 448—453.
6. W. Ritz. Über neue Methode zur Lösung gewisser Wariationsprobleme. J. für reine und angewandte Mathematik, 1909, 135, 102—109.
7. W. Ritz. Ann. phys., 1909, 28, 737—786.
8. R. Courant. Bulletin of America mathematik society, 1939, 49, 1—23.
9. П. М. Огибалов. Изгиб, устойчивость и колебания пластинок. Изд-во МГУ, 1958, 34—37.
10. В. В. Фурдуев. Электроакустика, М., ОГИЗ, 1948, 421—424.

Всесоюзный заочный
электротехнический институт связи
Москва

Поступила в редакцию
22 ноября 1968 г.