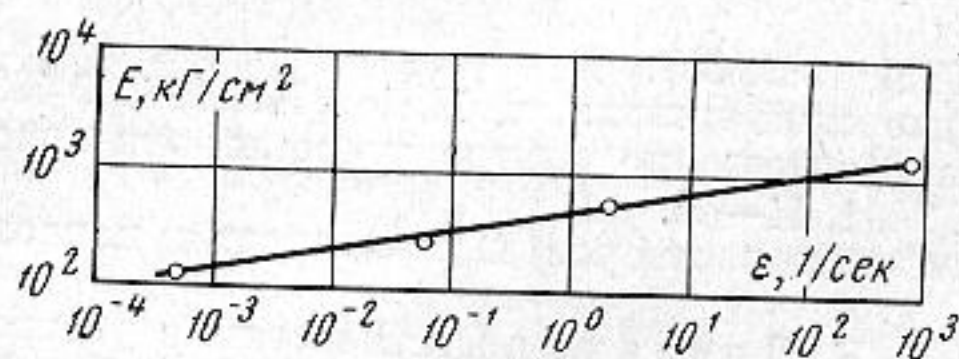


измерялась другим стрелочным индикатором 8. Специальными испытаниями было проверено, что индикаторы вносят лишь очень малую поправку в силы, действующие на образец и на динамометр.

Вибрационное нагружение осуществлялось на другой установке, описанной в работе [1]. Скорости деформирования $\dot{\epsilon}$ лежали в пределах от 1 до 10 1/сек. Индикатором силы служил проградуированный биморфный пьезоприемник из титаната бария.



Фиг. 2

Производилось измерение амплитуды деформации и амплитуды напряжения на образце при постепенном повышении амплитуды деформации и строилась характеристика $P(\epsilon)$.

Ударное нагружение осуществлялось на третьей установке, описанной в работе [2]. Скорости деформирования были порядка 10³ 1/сек. Измерялось отрицательное ускорение бойка в течение некоторого малого промежутка времени после удара и соответствующие среднее значение деформации.

Знание массы бойка позволило определить усиление, приложенное к образцу, которое вызвало данную деформацию ϵ и по ним вычислить приближенное значение модуля Юнга E .

В результате проведенных измерений получена зависимость между E и $\dot{\epsilon}$, представленная на фиг. 2 в двойном логарифмическом масштабе. Эта линейная зависимость означает, что между E и $\dot{\epsilon}$ в указанных на фигуре пределах существует соотношение

$$\frac{E}{E_0} = \left(\frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^n$$

с показателем степени n , который, согласно фиг. 2, получается равным $\sim 1/6$. Полагая $\dot{\epsilon} = 1/\text{сек}$, мы получаем $E_0 \simeq 480 \text{ кг/см}^2$.

Таким образом, на примере испытанного материала удалось получить аналитическое выражение зависимости модуля Юнга E пенопласта от скорости деформирования.

В заключение авторы выражают благодарность проф. Г. А. Остроумову за постоянную помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Крячко, Г. А. Остроумов. Вибрационные свойства порошлатов. Акуст. ж., 1967, 13, 4, 584—590.
2. В. М. Крячко, Г. А. Остроумов. Волны сжатия в порошлате. Акуст. ж., 1967, 13, 3, 455—456.

Ленинградский государственный университет

Поступило в редакцию
15 сентября 1968 г.

УДК 534.221

О СТРУКТУРЕ РАССЕЯННОГО ПОЛЯ В ВОЛНОВОДЕ С БЕСКОНЕЧНО ПРОТЯЖЕННОЙ НЕРОВНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Ю. П. Лысанов

Рассеянное поле в волноводе с неровной границей имеет ряд интересных особенностей, которые возникают при равенстве горизонтальных компонент волновых векторов какой-либо рассеянной нормальной волны и одной из нормальных волн «невозмущенного» волновода, т. е. волновода без неровностей на его границах. При этом оказывается, что помимо обычных пространственных осцилляций наблюдается линейное возрастание рассеянного поля с увеличением горизонтального расстояния от излучателя. Очевидно, рассеяние имеет резонансный характер и по своей физической природе аналогично явлению Вуда [1—4]. Наиболее ярко этот эффект проявляется в случае периодических неровностей, рассмотрением которого мы и ограничимся.

Пусть имеется волновод, границы которого определяются уравнениями $z = 0$ и $z = h + a \cos qx$. Предположим, что нижняя граница является абсолютно жесткой, а верхняя — абсолютно податливой. Уравнение Гельмгольца для потенциала скоростей в волноводе напишем в виде

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \psi = 4i\delta(x)\delta(z - z_0), \quad (1)$$

предполагая, что звуковое поле возбуждается бесконечно тонким цилиндрическим источником. Правая часть уравнения (1) выбрана так, что при $r = \sqrt{x^2 + (z - z_0)^2} \rightarrow 0$, $\Psi(x, z) \rightarrow H_0^{(1)}(kr)$.

Будем считать неровности малыми по сравнению с длиной волны звука и достаточно пологими, чтобы можно было применить обычный метод малых возмущений. Легко показать, что рассеянное поле в первом приближении метода малых возмущений в данном случае будет определяться следующим выражением:

$$\psi_s(x, z) = \frac{-ia}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \beta z}{\cos \beta h} \left(\frac{\cos \beta_1 z_0}{\cos \beta_1 h} + \frac{\cos \beta_{-1} z_0}{\cos \beta_{-1} h} \right) e^{i\xi x} d\xi, \quad (2)$$

где

$$\beta = \sqrt{k^2 - \xi^2}, \quad \beta_{\pm 1} = \sqrt{k^2 - (\xi \pm q)^2}.$$

Интеграл в формуле (2) можно представить в виде суммы вычетов в полюсах подынтегрального выражения, определяемых из следующих трех уравнений:

$$\cos \beta h = 0; \quad \cos \beta_1 h = 0; \quad \cos \beta_{-1} h = 0.$$

Первое из этих уравнений по своему виду совпадает с уравнением полюсов для невозмущенного волновода. Обозначим корни этих уравнений соответственно через ξ_n , ξ_{1n} , ξ_{-1n} , где индекс n пробегает все значения от 0 до ∞ . Возможны два случая. Первый случай соответствует тому, что все полюса подынтегрального выражения являются полюсами первого порядка, т. е. $\xi_n \neq \xi_{1m}$ и $\xi_n \neq \xi_{-1m}$ при любых значениях n, m . Во втором случае один или несколько полюсов являются полюсами второго порядка. При этом горизонтальные компоненты волновых векторов одной или нескольких рассеянных волн и нормальных волн невозмущенного волновода оказываются одинаковыми.

Если все полюса являются полюсами первого порядка, то рассеянное поле имеет вид

$$\psi_s(x, z) = \frac{2a}{h} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\beta_n}{\xi_n} \left\{ \cos \beta_n z \left(\frac{\cos \beta_1 z_0}{\cos \beta_1 h} + \frac{\cos \beta_{-1} z_0}{\cos \beta_{-1} h} \right) e^{i\xi_n x} + \right. \\ \left. + \cos \beta_n z_0 \left[\left(\frac{\cos \beta z}{\cos \beta h} \right)_{\xi_{1n}} e^{i\xi_{1n} x} + \left(\frac{\cos \beta z}{\cos \beta h} \right)_{\xi_{-1n}} e^{i\xi_{-1n} x} \right] \right\}, \quad (3)$$

где

$$\beta_n = \frac{\pi}{h} (n + 1/2), \quad \xi_n = \sqrt{k^2 - \beta_n^2}, \quad \xi_{1n} = -q + \xi_n, \quad \xi_{-1n} = q + \xi_n,$$

$n = 0, 1, 2, \dots$

Рассмотрим второй случай, когда один из полюсов является полюсом второго порядка. Пусть, например, $\xi_l = \xi_{1m}$. При $\xi = \xi_l = \xi_{1m}$ одновременно обращается в нуль как $\cos \beta h$ так и $\cos \beta_1 h$. Рассеянное поле будет иметь вид

$$\psi_s(x, z) = \frac{2a}{h} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\beta_n}{\xi_n} \left[\cos \beta_n z \left(\frac{\cos \beta_{-1} z_0}{\cos \beta_{-1} h} \right)_{\xi_n} e^{i\xi_n x} + \cos \beta_n z_0 \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{\cos \beta z}{\cos \beta h} \right)_{\xi_{-1n}} e^{i\xi_{-1n} x} \right] + \frac{2}{h} \sum_{n \neq l}^{\infty} (-1)^n \frac{\beta_n}{\xi_n} \cos \beta_n z \left(\frac{\cos \beta_1 z_0}{\cos \beta_1 h} \right)_{\xi_n} e^{i\xi_n x} + \frac{2a}{h} \times \quad (4)$$

$$\times \sum_{n \neq m}^{\infty} (-1)^n \frac{\beta_n}{\xi_n} \cos \beta_n z_0 \left(\frac{\cos \beta z}{\cos \beta h} \right)_{\xi_{1n}} e^{i\xi_{1n} x} + \frac{2a}{h} (-1)^{l+m} \frac{\beta_l \beta_m}{\xi_l \xi_m} \left[\frac{z_0 \xi_m}{\beta_m} \sin \beta_m z_0 \cos \beta_l z + \right. \\ \left. + \cos \beta_m z_0 \left(\frac{z \xi_l}{\beta_l} \sin \beta_l z + i x \cos \beta_l z \right) \right] e^{i\xi_l x}.$$

Таким образом, во втором случае в выражении для рассеянного поля появляется член, линейно растущий с расстоянием. Однако, поскольку рассеянное поле в приближении метода малых возмущений должно быть мало по сравнению с полем невозмущенного волновода, то возникает ограничение на максимально допустимое расстояние. Потребовав, чтобы нарастающий с расстоянием член был мал по сравне-

лию с нормальной волной того же номера в невозмущенном волноводе, получим условие $a\beta_l \frac{x}{\Delta_m} \ll 1$, где множитель $a\beta_l = ka \cos \theta_l$ есть параметр Рэля, а

$\Delta_m = 2h \frac{\beta_m}{\xi_m}$ — длина луча, соответствующего нормальной волне номера m . Ус-

ловие применимости первого приближения метода малых возмущений для расчета рассеянного поля в нерегулярном волноводе оказывается более жестким, чем в случае одной неровной границы: нужно, чтобы произведение параметра Рэля на число циклов, укладываемых на пути между излучателем и приемником, было мало по сравнению с единицей.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Wood. On a remarkable case of uneven distribution of light in a diffraction grating problem. *Phil. Mag.*, 1902, 4, 396.
2. Л. Н. Дерюгин. О поверхностном резонансе на отражательной решетке. Докл. АН СССР, 1954, 94, 2, 203—206.
3. Ю. П. Лысанов. К вопросу о поверхностном резонансе на синусоидальной поверхности. *Акуст. ж.*, 1960, 6, 1, 77—80.
4. Ю. П. Лысанов. О резонансных явлениях при рассеянии волн на неровной границе раздела сред со слабым перепадом скорости звука. *Акуст. ж.*, 1968, 14, 3, 413—415.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступило в редакцию
15 мая 1968 г.

УДК 534.114

ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТОНКОГО СТЕРЖНЯ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

Л. Д. Любавин, Н. К. Петров

До настоящего времени в литературе, посвященной продольным колебаниям механических систем, в большинстве случаев рассматривались продольные колебания либо прямых стержней, либо замкнутых цилиндрических оболочек. Конкретное рассмотрение вопроса о чисто продольных колебаниях кривых стержней не представляло, по-видимому, практического интереса. В настоящее время появилась необходимость использования в некоторых случаях продольных колебаний стержней, имеющих постоянный радиус кривизны.

Для определения резонансных частот и собственных форм продольных колебаний тонкого стержня постоянной кривизны воспользуемся уравнением движения элемента такого стержня в проекции на направление нормали и касательной к его оси, приведенным Лявом [1] для продольных колебаний замкнутого кольца:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{E}{a^2 \rho} \left[\frac{\partial W}{\partial \varphi} - V \right]; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \frac{E}{a^2 \rho} \left[\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right], \quad (1)$$

где a — радиус кривизны стержня, ρ — плотность материала стержня, E — модуль Юнга материала стержня, $W(\varphi)$ — смещение в направлении касательной к оси стержня, $U(\varphi)$ — смещение в радиальном направлении (см. фиг. 1). При этом стержень считается достаточно тонким, так что по всей толщине его радиальные напряжения $\sigma_r = 0$. Если считать U и W гармоническими функциями времени t , то из уравнений (1) непосредственно следует, что $W = \partial u / \partial \varphi$ и уравнения (1) запишутся соответственно: $\partial^2 U / \partial \varphi^2 + m^2 U = 0$; $\partial^2 W / \partial \varphi^2 + m^2 W = 0$, где $m^2 = (a \cdot \omega / c)^2 - 1$; $c = (E / \rho)^{1/2}$ — скорость звука в прямом бесконечном стержне. Решение этих уравнений общеизвестно. Поскольку мы рассматриваем свободный стержень, граничными условиями следует считать равенство нулю напряжений σ_r , а следовательно, и относительных деформаций на концах стержня, т. е. $\xi_r = (\partial W / \partial \varphi - U) / a = 0$ при $\varphi = 0$ и $\varphi = \Theta$. С учетом этих краевых условий нетрудно получить общее решение задачи о продольных колебаниях изогнутого свободного стержня в виде

$$U(\varphi) = \sum_{i=1}^{\infty} U_i \sin m_i \varphi; \quad W(\varphi) = \sum_{i=1}^{\infty} W_i \cos m_i \varphi, \quad (2)$$