АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XIV 1968 Вып. 2

УДК 534.232

РАСЧЕТ СОСТАВНОГО ПЬЕЗОВИБРАТОРА ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ В СИЛЬНОПОГЛОЩАЮЩИХ МАТЕРИАЛАХ

В. М. Меркулова

Выведены выражения для расчета величин скоростей и внутреннего трения материалов при использовании метода составного вибратора. Произведена оценка точности полученных формул. Показано, что в случае образцов с большим собственным поглощением, возбуждаемых посредством кварцевого стержня среза $xys/-18{,}5°$, не требуется специальной подгонки элементов вибратора до полуволновых размеров; при этом могут быть реализованы точности порядка 1% для скорости и 10—15% для внутреннего трения. Рассмотрен вопрос о выборе оптимальных соотношений геометрических размеров вибратора.

При ультразвуковых резонансных измерениях упругих постоянных и внутреннего трения на образцах из сильнопоглощающих материалов (различного рода звукопоглотителей, строительных материалов, пластмасс) неконтактные способы возбуждения и приема колебаний обычно оказываются недостаточными для получения нужной чувствительности. В этой связи представляет интерес использование метода составного вибратора, где исследуемый образец непосредственно склеивается с пьезопреобразователем, выполняющим роль активного элемента; измеряя резонансные характеристики такой системы, возможно находить параметры исследуемого материала [1].

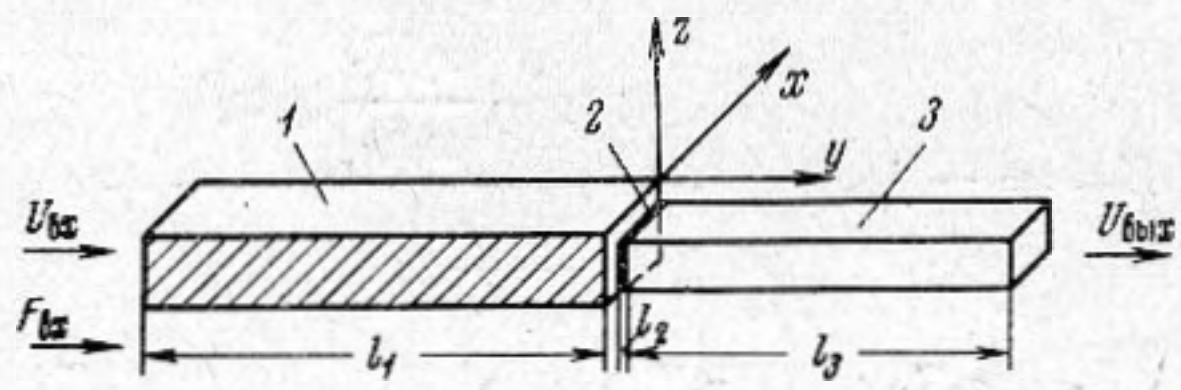
Простые расчетные формулы для составного вибратора можно получить, решая одномерную задачу, в которой распространяющаяся волна с достаточным приближением может рассматриваться как плоская. Этому условию соответствуют два предельных случая $\Lambda \gg d$ и $\Lambda \ll d$ (Λ — длина звуковой волны, d — поперечные размеры преобразователя и образца). В первом мы имеем вибратор стержневого типа, во втором — составную пластину.

При выборе пьезопреобразователя следует стремиться к тому, чтобы его собственные внутренние потери были на несколько порядков меньше по сравнению с потерями в исследуемом материале. Это значительно упрощает расчет. Указанному требованию наилучшим образом отвечает пьезокварц, обладающий, кроме того, весьма высокой стабильностью параметров. При исследовании материалов с очень большим внутренним трением (при $Q^{-1} > 0{,}1$) возможно использование пьезокерамических преобразователей.

В области частот порядка килогерц для возбуждения продольных колебаний удобнее всего применять кварцевые стержни прямоугольного сечения с длиной, ориентированной по оси y или y', повернутой на $-18{,}5°$ (срезы xy и $xys/-18{,}5°$); электрическое поле прилагается по оси x, направленной вдоль толщины кристалла. Для среза $xys/-18{,}5°$ постоянная гибкости S_{24}' для деформаций сдвига вдоль грани $y'z'$ равна нулю, что позволяет частично избавляться от нежелательных типов колебаний.

Ниже приводится расчет составного вибратора при произвольном соотношении линейных размеров отдельных элементов с учетом влияния слоя склейки.

Рассмотрим вибратор, работающий на продольных колебаниях. Схема вибратора изображена на фиг. 1. Величины, относящиеся к пьезокристаллу *1*, слою склейки *2* и образцу *3*, соответственно отмечены индексами



Фиг. 1

1, 2, 3. В одномерном приближении колебательные смещения для каждого из элементов выражаются так:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= A_1 \cos q_1 y + B_1 \sin q_1 y, & -l_1 < y < 0, \\ u_2 &= A_2 \cos q_2 y + B_2 \sin q_2 y, & 0 < y < l_2, \\ u_3 &= A_3 \cos q_3' y + B_3 \sin q_3' y, & l_2 < y < l_2 + l_3, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

где

$$q_1 = \omega / c_1, \quad q_2 = \omega / c_2, \quad q_3' = q_3 + j\alpha_3 = (\omega / c_3) + j\alpha_3,$$

α_3 — коэффициент диссипативного поглощения звука в образце. Потери в слое склейки мы не учитываем, поскольку всегда $\alpha_2 \ll q_2$ и $l_2 \ll l_1$, l_3; при этом достаточно удержать члены только 1-го порядка по $q_2 l_2$.

Граничные условия равенства продольных смещений и упругих напряжений или движущих сил (если площади сечений стержня S_1 и S_3 не равны между собой) формулируются следующим образом. При $y = -l_1$

$$\left.\begin{aligned} A_1 \cos q_1 l_1 - B_1 \sin q_1 l_1 &= u_{вх} \\ E_1 q_1 S_1 (A_1 \sin q_1 l_1 + B_1 \cos q_1 l_1) &= E_{вх} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

где $F_{вх}$ — движущая сила пьезоэлектрического возбуждения; при $y = 0$.

$$A_1 = A_2, \qquad B_1 E_1 S_1 q_1 = B_2 E_2 S_3 q_2 \text{ *}; \quad (3)$$

при $y = l_2$

$$\left.\begin{aligned} A_2 + B_2 q_2 l_2 &= A_3 + B_3 q_3' l_2, \\ E_2 q_2 (-A_2 q_2 l_2 + B_2) &= E_3' q_3' (-A_3 q_3' l_2 + B_3) \end{aligned}\right\}; \quad (4)$$

при $y = l_2 + l_3$

$$\begin{aligned} A_3 \cos q_3' (l_2 + l_3) + B_3 \sin q_3' (l_2 + l_3) &= u_{вых}, \\ -A_3 \sin q_3' (l_2 + l_3) + B_3 \cos q_3' (l_2 + l_3) &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

При расчете характеристик вибратора удобно исходить из величины механического сопротивления, определяемого как

$$Z_{вх} = \frac{F_{вх}}{j\omega u_{вх}} = R_{вх} + jX_{вх}, \quad (6)$$

где $R_{вх}$ и $X_{вх}$ — активная и реактивная составляющие. Из формул (2) и (6) находим

$$Z_{вх} = -jz_1 S_1 [\operatorname{tg} q_1 l_1 + B_1 / A_1] / [1 - (B_1 / A_1) \operatorname{tg} q_1 l_1], \quad (7)$$

где $z_1 = E_1 q_1 / \omega$ — удельное акустическое сопротивление. Решение си-

* Здесь и далее мы считаем, что площадь склейки $S_2 = S_3$.

стемы уравнений (3) — (5) дает выражение

$$\frac{B_1}{A_1}=\frac{z_2S_3}{z_1S_1}\left\{\frac{-q_3'l_2+(z_2/z_3')\,q_2l_2+\operatorname{tg}[q_3'(l_3+l_2)]}{z_2/z_3+[(z_2/z_3')\,q_3'l_2-q_2l_2]\operatorname{tg}[q_3'(l_3+l_2)]}\right\}$$

Подставив найденное значение (B_1/A_1) в выражение (7) и выполнив последовательно все разложения с точностью до линейных членов по q_2l_2, получим

$$Z_{\text{вх}}=-jz_1S_1\left[\frac{\operatorname{tg}x_1+\dfrac{z_3'S_3}{z_1S_1}\operatorname{tg}x_3'}{1-\dfrac{z_3'S_3}{z_1S_1}\operatorname{tg}x_1\operatorname{tg}x_3'}+\right.$$

$$\left.+\,q_2l_2\frac{\dfrac{z_2S_3}{z_1S_1}\left(1+\dfrac{z_3'^2}{z_2^2}\operatorname{tg}^2x_3'\right)(1+\operatorname{tg}^2x_1)}{\left(1-\dfrac{z_3'S_3}{z_1S_1}\operatorname{tg}x_1\operatorname{tg}x_3'\right)^2}\right] \qquad (8)$$

$$x_1=q_1l_1,\qquad x_1'=q_3'l_3.$$

Формула для $Z_{\text{вх}}$ является достаточно общей и позволяет получить уравнение собственных резонансных частот составного стержня, а также связать измеряемое внутреннее трение (обратную механическую добротность) $Q^{-1}_{\text{изм}}=2\Delta f/f_p$ с внутренним трением исследуемого материала Q^{-1}.

При резонансе амплитуда колебаний максимальна, что соответствует $(X_{\text{вх}})_{f_p}=0$. Влияние собственного поглощения в образце на резонансные частоты определяется членами, пропорциональными α_3^2, и практически им можно пренебрегать.

Добротность и связанная с нею полоса пропускания (на уровне 0,707) отвечают изменению модуля входного сопротивления в $\sqrt{2}$ раз и находятся из равенства $|X_{\text{вх}}|=R_{\text{вх}}$. Для расчета необходимо положить приближенно

$$z_3'\approx z_3(1-j\alpha_3/q_3),\ \operatorname{tg}q_3'l_3\approx\operatorname{tg}q_3l_3+j\alpha_3l_3(1+\operatorname{tg}^2q_3l_3). \qquad (9)$$

Последние выражения справедливы при условии

$$Q\geqslant 0{,}5;\qquad Q\geqslant q_3l_3\operatorname{tg}q_3l_3/2. \qquad (10)$$

Из формулы (8) при отсутствии слоя склейки ($l_2=0$) мы получим характеристическое уравнение частот

$$\operatorname{tg}x_1^0+\frac{z_3S_3}{z_1S_1}\operatorname{tg}x_3^0=0. \qquad (11)$$

По уравнению (11) при заданных значениях c_1, f_p, ρ_1, ρ_3, S_1, S_3, l_1, l_3 численным методом может быть определена скорость в исследуемом образце. Для снижения погрешности расчетов более удобно брать отношение масс пьезостержня и образца

$$a_{13}=\rho_1S_1l_1/\rho_3S_3l_3=M_1/M_3,$$

которое находится путем точного взвешивания. При этом выражение (11) целесообразно представить в форме

$$\frac{\operatorname{tg}x_1^0}{x_1^0}+\frac{1}{a_{13}}\cdot\frac{\operatorname{tg}x_3^0}{x_3^0}=0. \qquad (12)$$

Для следующего приближения, сохранив в формуле (8) линейные члены по q_2l_2, получим

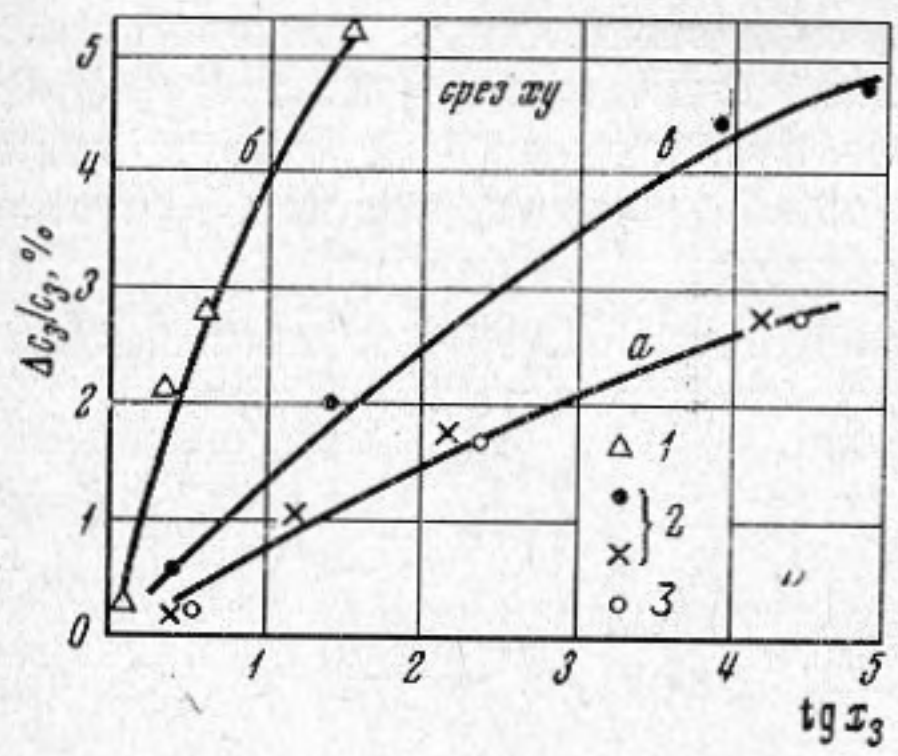
$$\operatorname{tg}x_1+\frac{z_3S_3}{z_1S_1}\operatorname{tg}x_3+q_2l_2\frac{z_2S_3}{z_1S_1}\left(1+\frac{z_3^2}{z_2^2}\operatorname{tg}^2x_3^0\right)=0, \qquad (13)$$

или

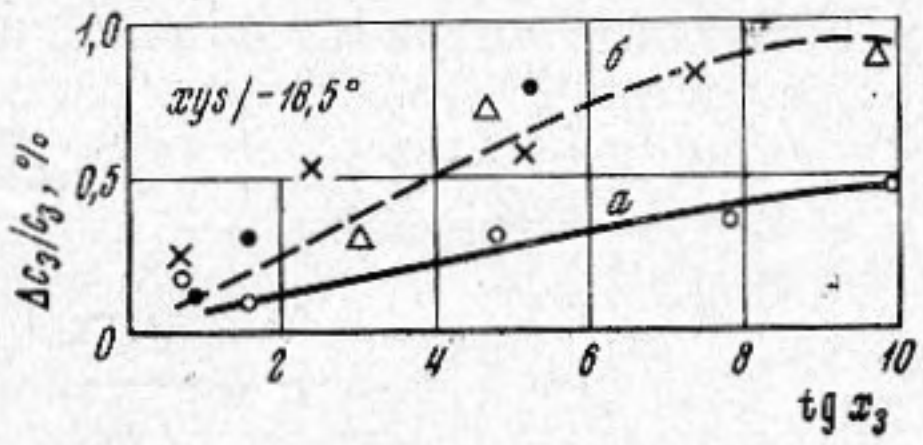
$$\frac{\operatorname{tg} x_1}{x_1} + \frac{1}{a_{13}} \cdot \frac{\operatorname{tg} x_3}{x_3} + \frac{1}{a_{12}} \left[1 + (q_2 l_2 a_{12})^2 \frac{\operatorname{tg}^2 x_1^0}{x_1^{0^2}} \right] = 0. \qquad (14)$$

Здесь $a_{12} = M_1 / M_2$, M_2 — масса склеивающего слоя. Уравнения резонансных частот (13) или (14) в отличие от уравнений (11) или (12) учитывают наличие слоя склейки. Влияние последнего зависит от его толщины, а также соотношений акустических сопротивлений склеивающего вещества и исследуемого образца.

Если обозначить через c_3^0 скорость, найденную из уравнения (11), а через $c_3 = c_3^0 + \Delta c_3$ из уравнения (13) для той же ре-



Фиг. 2



Фиг. 3

зонансной частоты, то, взяв разность обоих уравнений, получим соотношение

$$\rho_3 \left(c_3 \operatorname{tg} \frac{\omega_p l_3}{c_3} - c_3^0 \operatorname{tg} \frac{\omega_p l_3}{c_3^0} \right) = -q_2 l_2 z_2 \left(1 + \frac{z_3^2}{z_2^2} \operatorname{tg}^2 x_3^0 \right).$$

Погрешность в скорости, обязанная своим происхождением влиянию слоя, будет

$$\frac{\Delta c_3}{c_3^0} \approx \frac{l_2 \rho_2}{l_3 \rho_3} \frac{1 + (z_3^2/z_2^2) \operatorname{tg}^2 x_3^0}{1 + \operatorname{tg}^2 x_3^0 - (1/x_3^0) \operatorname{tg} x_3^0}. \qquad (15)$$

Акустические сопротивления используемых на практике склеивающих веществ обычно невелики, поэтому z_3^2 / z_2^2 оказывается довольно большим; например, при приклейке алюминиевого стержня воском данное отношение ~ 100. Приняв, например, $l_2 = 5$ *мк*, $l_3 = 50$ *мм*, $\rho_3 / \rho_2 = 2{,}5$, получим

$$\left(\frac{\Delta c_3}{c_3^0} \right)_{\max} \approx 0{,}4\%, \ (l_3 \to \Lambda/4)^0, \quad \left(\frac{\Delta c_3}{c_3^0} \right)_{\min} \approx 4 \cdot 10^{-3}\%, \ (l_3 \to \Lambda/2).$$

Таким образом, при использовании составного вибратора эффект склейки (даже при достаточно тщательном ее выполнении) может давать разброс скоростей порядка десятых долей процента.

Другая, практически очень существенная погрешность, связана с предположением об одномерности задачи. В действительности, использованные нами условия равенства движущих сил (или напряжений, если $S_1 = S_3$) в местах сочленений несовместимы с равенством радиальных смещений. Так как $u_r = \sigma r u_y'$ (здесь σ — коэффициент Пуассона), то за исключением очевидных частных случаев, а именно, случая полуволновых стержней, где $u_y' = 0$ и случая $S_1 = S_3$, $E_1 / \sigma_1 = E_3 / \sigma_3$, оба граничных условия не могут быть удовлетворены одновременно. Различие радиальных смещений стержней должно приводить к некоторому изменению резонансных частот.

Так как теоретический расчет погрешностей, обусловленных невыполнением условий одномерного приближения невозможен, были осуществлены экспериментальные исследования. На одних и тех же образцах определялись величины скоростей: (*а*) методом составного вибратора, (*б*) резонансным — с применением неконтактного (электростатистического) воз-

буждения; точность второго метода $\sim 0{,}05\%$. По разности измеренных величин оценивалась погрешность $\Delta c_3 / c_3$. На фиг. 2 представлены результаты измерений скорости для составного вибратора с кварцем среза xy ($l_y = 109{,}2$ *мм*, $l_x = l_z = 13$ *мм*); *а*, *б* — $\sigma = 0{,}07$; *в* — $\sigma = 0{,}31$. Отношения площадей S_3 / S_1 равны: *1* — 4,5; *2* — 0,45; *3* — 0,33. Фиг. 3 отвечает вибратору со срезом $xys / -18{,}5°$ ($l_{y'} = 50$ *мм*, $l_x = l_{z'} = 7{,}4$ *мм*), $S_3 / S_1 \approx 1$; *а* — $\sigma = 0{,}07$; *б* — средняя кривая для ряда образцов $\sigma = 0{,}25 \div 0{,}31$. Из сравнения кривых *а*, *б* фиг. 2 следует, что наиболее выгодны системы, у которых $S_3 / S_1 \leqslant 1$; при $S_3 / S_1 > 1$ погрешность сильно увеличивается. Существенные преимущества выявляются при использовании среза $xys / -18{,}5°$; даже для стержней, длины которых всего на 6% отличаются от $\Lambda / 4$, значения $\Delta c_3 / c_3$ не превосходят 1%. Отсюда видно, что если ограничиваться точностями порядка процента, нет необходимости в подгонке образцов до полуволновых размеров.

Установим теперь связь между Q^{-1} и $Q_{\text{изм}}^{-1}$. Входное сопротивление в полосе частот $\pm\Delta f$ вблизи резонанса согласно формуле (8) будет

$$Z_{\text{вх}} \equiv -jz_1S_1\left[\operatorname{tg}(x_1 + \Delta x_1) + \frac{z_3S_3}{z_1S_1}\left(1 - j\frac{\alpha_3}{q_3}\right)\operatorname{tg}(x_3 + \Delta x_3 + j\alpha_3 l_3) + \right.$$
$$\left. + q_2 l_2 \frac{z_2S_3}{z_1S_1}\left(1 + \frac{z_3^2}{z_2^2}\operatorname{tg}^2 x_3\right)\right]. \qquad (16)$$

Приравняв в последнем выражении активную и реактивную составляющие и используя условие резонанса (13), найдем

$$2\pi\Delta f\left[\frac{l_1}{c_1}(1 + \operatorname{tg}^2 x_1) + \frac{z_3S_3}{z_1S_1}\frac{l_3}{c_3}(1 + \operatorname{tg}^2 x_3)\right] =$$
$$= \frac{z_3S_3}{z_1S_1}\left[\alpha_3 l_3(1 + \operatorname{tg}^2 x_3) - \frac{\alpha_3}{q_3}\operatorname{tg} x_3\right]. \qquad (17)$$

Отсюда после простых преобразований получается формула для расчета величины внутреннего трения в материале стержня

$$Q^{-1} = Q_{\text{изм}}^{-1}\frac{a_{13}(1 + \operatorname{tg}^2 x_1) + (1 + \operatorname{tg}^2 x_3)}{1 + \operatorname{tg}^2 x_3 - (1/x_3)\operatorname{tg} x_3} = Q_{\text{изм}}^{-1}C. \qquad (18)$$

Для использования этой формулы необходимо, чтобы соблюдалось условие малости толщины слоя склейки

$$q_2 l_2 \ll \frac{z_2}{z_3\, 2\operatorname{tg} x_3}, \qquad (19)$$

(корни x_1 и x_3 приближенно могут быть заменены через x_1^0 и x_3^0). Множитель C учитывает распределение колебательной энергии между пьезопреобразователем и образцом; когда $C \to 1$, почти вся энергия оказывается сосредоточенной в образце. В частном случае полуволновых стержней

$$C = (M_1 + M_3) / M_3. \qquad (20)$$

Для проверки применимости выведенных из одномерной теории формул были проведены экспериментально исследования на ряде сильнопоглощающих материалов (горные породы). В таблице представлены Q, полученные методом составного вибратора для двух предельных случаев, когда l_3 близко к $\Lambda / 2$ или к $\Lambda / 4$. Как видно из таблицы, максимальный разброс добротностей для одного и того же образца при использовании в качестве пьезопреобразователя кварцевого стержня $xys / -18{,}5°$ не превышает 10—15%. Это является вполне приемлемым. Таким образом, при невысоких значениях Q измерения поглощения, так же как скорости, могут осуществляться на образцах практически любой длины. Срез xy дает гораздо худшие результаты.

Измерение упругих постоянных и внутреннего трения составного стержня можно проводить двумя способами: по резонансной кривой путем замера относительной величины амплитуды механических колебаний и по характеристике элекрического импеданца пьезопреобразователя. При втором способе необходимо связать электрическое сопротивление вибратора с ме-

		Q							
№ образцов		1	2	3	4	5	6	7	8
Срез $xys/-18{,}5°$ $l_{y'}=50$ *мм* $l_x=l_{z'}=7{,}4$ *мм* $f_p=50$ *кгц*	$l_3\approx\frac{\Lambda}{2}$	32	42	55	90	158	220	230	390
	$l_3\simeq\frac{\Lambda}{4}$	35	45	48	80	152	200	200	325
Срез xy $l_y=64{,}5$ *мм* $l_x=7{,}5$ *мм* $l_z=8$ *мм* $f_p=41$ *кгц*	$l_3\approx\frac{\Lambda}{2}$	28	42	58	88	—	200	230	390
	$l_3\approx\frac{\Lambda}{4}$	22	44	25	65	—	165	180	290

ханической добротностью. Из общей формулы (8) для $Z_{\text{вх}}$ на резонансе мы получим, пренебрегая слоем склейки

$$(R_{\text{вх}})_{f_p}=\operatorname{Re}(Z_{\text{вх}})=z_3S_3\alpha_3l_3\frac{1+\operatorname{tg}^2x_3-(1/x_3)\operatorname{tg}x_3}{1+\left(\frac{z_3S_3}{z_1S_1}\right)^2\operatorname{tg}^2x_3}. \tag{21}$$

При полуволновом образце

$$(R_{\text{вх}})_{f_p}=z_3S_3\alpha_3l_3=M_3\pi f_pQ^{-1}. \tag{22}$$

На основании электромеханической эквивалентной схемы пьезопреобразователя найденное значение $(R_{\text{вх}})_{f_p}$ пересчитывается в электрическое сопротивление согласно формуле

$$R_{\text{эл}}=(R_{\text{вх}})_{f_p}(S_{22}{}^E)^2/4l_z{}^2d_{12}{}^2, \tag{23}$$

где $S_{22}{}^E$ — постоянная гибкости, d_{12} — пьезомодуль, l_z — ширина стержня.

Переход от стержневого вибратора к составной пластине можно осуществить путем простой замены модуля E на $\lambda+2\mu$ (λ и μ — постоянные Ламе), положив также $S_1=S_3$. Сопротивления в этом случае пересчитываются по формуле

$$R_{\text{эл}}=(R_{\text{вх}})_{f_p}l_x{}^2/4S^2e_{11}{}^2, \tag{24}$$

S — площадь пластины, l_x — ее толщина, e_{11} — пьезопостоянная.

При высокочастотных измерениях по методу составной пластины необходимо соблюдать достаточно точно параллельность торцовых поверхностей $\Delta l_x/l_x\ll Q^{-1}$; в противном случае будет наблюдаться расширение резонансной кривой вследствие неоднородного возбуждения разных участков образца.

В заключение остановимся на вопросе о выборе оптимальных соотношений продольных и поперечных размеров вибратора с учетом влияния паразитных мод колебаний. Для стержневых систем обычно целесообразно соблюдать соотношение $(l_1+l_3)/d\approx 10\div 20$; это дает возможность проводить измерения на нескольких собственных частотах, что важно, например, при исследовании частотной зависимости Q. Влияние эффекта инерции поперечного движения на величину фазовой скорости может быть при

этом учтено с помощью поправок Рэлея:

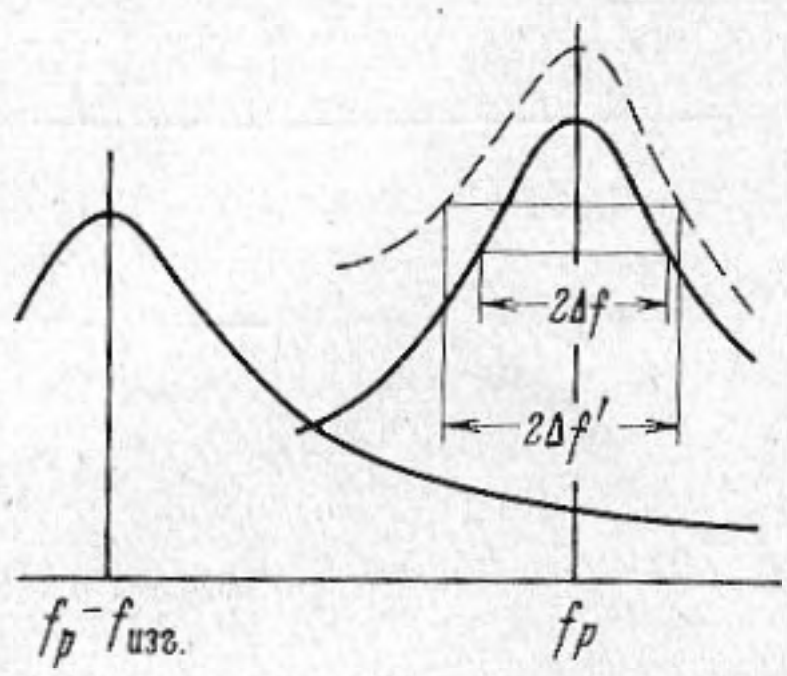
$$c_3 = \sqrt{\frac{E_3}{\rho_3}}\left[1 - \frac{\pi^2\sigma_3^2}{4}\left(\frac{d}{\Lambda}\right)^2\right], \tag{25}$$

— образец круглого сечения

$$c_3 = \sqrt{\frac{E_3}{\rho_3}}\left[1 - \frac{\pi^2\sigma_3^2(a^2+b^2)}{6\Lambda^2}\right] \tag{26}$$

— прямоугольное сечение $(S = a \cdot b)$.

С другой стороны при очень больших отношениях $(l_1 + l_3) / d$ довольно эффективно возбуждаются низкочастотные изгибные моды, обязанные своим происхождением сдвигу вдоль грани пьезопреобразователя (если используется срез xy) или возможной осевой несимметрии масс в самой системе вибратора. Взаимодействие частоты изгибных колебаний с основной частотой дает сложный спектр, состоящий из ряда близко расположенных резонансных пиков с расстояниями порядка $f_{изг}$ *. Это в свою очередь обусловливает несимметрию резонансной кривой и существенно влияет на результаты измерений (см. фиг. 4). Если принять погрешность для Q равной 5%, то необходимо, чтобы выполнялось условие $f_{изг} \geqslant 5\Delta f$ или $Q \geqslant 7{,}5 f_p / f_{изг}$. Основная частота продольных колебаний $f_p = (1/2l)\sqrt{E/\rho}$, низшая изгибная — $f_{изг} \approx (0{,}89 d / l^2) \cdot \sqrt{E/\rho}$, поэтому указанное условие можно представить в виде



Фиг. 4

$$Q > 4l / d. \tag{27}$$

Если взять, например, $l / d \sim 20$, тогда величина Q, при которой уже можно не считаться с паразитными резонансами, должна быть не менее 100. Другой предельный случай соответствует $\Delta f \gg f_{изг}$. Он реализуется для материала с низкой добротностью.

При высокочастотных измерениях методом составной пластины,

$$f_p = \frac{1}{2l_x}\sqrt{\frac{E}{\rho}\frac{(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}}, \quad f_{изг} = \frac{\xi^2 l_x}{\pi\phi^2}\sqrt{\frac{E}{3\rho(1-\sigma^2)}} \tag{28}$$ **

где ϕ — диаметр, $f_{изг}$ соответствует пластине со свободными краями [2]. При этом

$$f_p / f_{изг} \approx 0{,}3(\phi / l_x)^2; \tag{29}$$

приняв $(\phi / l_x) \approx 50$, найдем $f_p / f_{изг} = 800$. Если $Q < 100$, влиянием сложного спектра можно пренебрегать.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Г. Михайлов, В. А. Соловьев. Применение составного пьезоэлектрического вибратора для исследования механических свойств полимеров. Акуст. ж., 1955, 1, 3, 343.
2. Рэлей. Теория звука. М., ГТТИ, 1955, т. 1, стр. 379.

Ленинградский горный институт
им. Г. В. Плеханова

Поступила в редакцию
29 декабря 1966 г.

---

* Возникновение комбинационных частот может быть обусловлено нелинейностью электронной схемы.

** ξ являются корнями уравнения

$$\frac{I_0(\xi)}{I_1(\xi)} + \frac{J_0(\xi)}{J_1(\xi)} = \frac{2(1-\sigma)}{\xi}; \quad \text{при } \sigma = 0{,}25 \ \ \xi_1 = 2{,}98, \quad \xi_2 = 6{,}19.$$