АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XIV 1968 Вып. 2

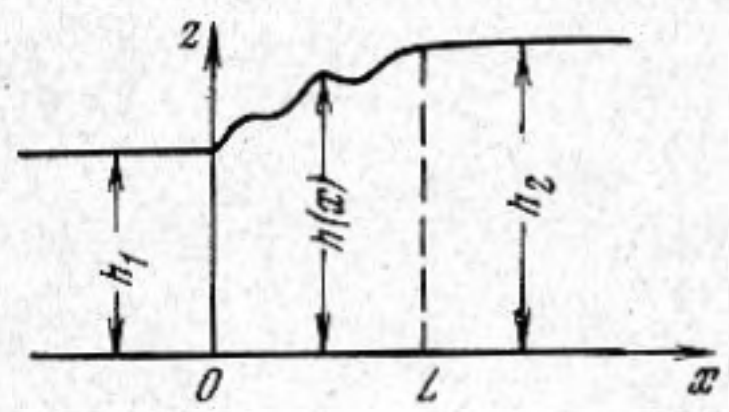
УДК 534.26

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЗВУКА В ВОЛНОВОДЕ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

А. Д. Лапин

Рассмотрена плоская задача о распространении звука в волноводе переменного сечения. За пределами нерегулярного участка звуковое поле в нерегулярном волноводе определяется в виде суперпозиции нормальных волн для соответственного волновода без нерегулярностей. Показано, что при любом изменении сечения волновода задача сводится к решению бесконечной системы алгебраических уравнений с постоянными коэффициентами. Для волноводов с медленно изменяющимся сечением решение получено в конечном виде.

В работе [1] была рассмотрена задача о распространении звука в волноводе, имеющем нерегулярности в среде или на стенках. При ее решении предполагалось, что в своей регулярной части волновод имеет одинаковую ширину. Способом, аналогичным изложенному в работе [1], можно получить решение этой задачи и для волновода, у которого ширина до нерегулярного участка не совпадает с шириной после него. В качестве иллюстрации мы рассмотрим задачу о распространении звука в волноводе переменного сечения (см. фигуру), предполагая, что ширина волновода зависит только от координаты x (плоская задача). Стенки волновода мы будем считать абсолютно жесткими.



Выберем в качестве падающего поля гармоническую нормальную волну порядка q

$$\Psi_i = e^{i\tilde{\xi}_q x} \cos(\tilde{k}_q z),$$

где $\tilde{k}_q = q\pi / h_1$, $\tilde{\xi}_q = \sqrt{k^2 - \tilde{k}_q^2}$. Полное поле Ψ в неоднородном волноводе ищем в виде

$$\Psi = \begin{cases} \Psi_i + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \tilde{A}_n e^{-i\tilde{\xi}_n x} \cos(\tilde{k}_n z) \text{ при } x < 0 \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} \tilde{\tilde{A}}_n e^{i\tilde{\tilde{\xi}}_n x} \cos(\tilde{\tilde{k}}_n z) \text{ при } x > L, \end{cases}$$

где $\tilde{A}_n$ и $\tilde{\tilde{A}}_n$ — искомые амплитуды нормальных волн. Величины $\tilde{\tilde{k}}_n$ и $\tilde{\tilde{\xi}}_n$ получаются соответственно из формул для величин $\tilde{k}_n$ и $\tilde{\xi}_n$ с заменой в них h_1 на h_2. Применим формулу Грина [2] в замкнутой области, образованной

стенками волновода и плоскостями $x = 0$ и $x = L$. Эта формула имеет вид

$$\int_0^{h_2} \left\{ \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right\}_{x=L} dz - \int_0^{h_1} \left\{ \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right\}_{x=0} dz =$$

$$= \int_0^{L} \left\{ \left[\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{dh}{dx} \right] \Psi \right\}_{z=h(x)} dx, \tag{1}$$

где Φ — вспомогательное поле, удовлетворяющее волновому уравнению. Выбирая это поле в виде

$$\Phi = \Phi_m^{(1)} \equiv e^{i\widetilde{\xi}_m x} \cos(\widetilde{k}_m z) \text{ и } \Phi = \Phi_m^{(2)} \equiv e^{-i\widetilde{\widetilde{\xi}}_m x} \cos(\widetilde{\widetilde{k}}_m z),$$

мы получим из соотношения (1) соответственно следующие формулы:

$$\widetilde{A}_m = \frac{1}{i\theta_m \widetilde{\xi}_m h_1} \left\{ \sigma_m^{(1)} - \frac{i}{2} h_2 \sum_{n=0}^{\infty} (\widetilde{\widetilde{\xi}}_n - \widetilde{\xi}_m) \tau_{mn}^{(1)} \exp[i(\widetilde{\xi}_m + \widetilde{\widetilde{\xi}}_n) L] \widetilde{\widetilde{A}}_n \right\}, \tag{2}$$

$$\widetilde{\widetilde{A}}_m = \frac{1}{i\theta_m \widetilde{\widetilde{\xi}}_m h_2} \left\{ \sigma_m^{(2)} - \frac{i}{2} h_1 \sum_{n=0}^{\infty} \tau_{mn}^{(2)} [(\widetilde{\xi}_n - \widetilde{\widetilde{\xi}}_m) \widetilde{A}_n - (\widetilde{\widetilde{\xi}}_m + \widetilde{\xi}_q) \delta_{nq}] \right\}, \tag{3}$$

где

$$\sigma_m^{(\,)} = \int_0^{L} \left\{ \left[\frac{\partial \Phi_m^{(j)}}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_m^{(j)}}{\partial x} \frac{dh}{dx} \right] \Psi \right\}_{z=h(x)} dx;$$

$$\theta_m = \begin{cases} 2 & \text{при } m = 0. \\ 1 & \text{при } m \neq 0, \end{cases}$$

$$\tau_{mn}^{(1)} = \begin{cases} \theta_m & \text{при } \widetilde{k}_m = \widetilde{\widetilde{k}}_n \\ (-1)^n \dfrac{2\widetilde{k}_m \sin(\widetilde{k}_m h_2)}{[(\widetilde{k}_m^2 - \widetilde{\widetilde{k}}_n^2) h_2]} & \text{при } \widetilde{k}_m \neq \widetilde{\widetilde{k}}_n. \end{cases}$$

Величины $\tau_{mn}^{(2)}$ вычисляются по формуле для $\tau_{mn}^{(1)}$ с заменой в ней h_1 на h_2 и наоборот. Формулы (2) и (3) дают бесконечную систему алгебраических уравнений для определения амплитуд рассеянных нормальных волн, если известно поле на поверхности $h(x)$. При $h_1 = h_2$ эта система уравнений вырождается и ее решение можно написать в конечном виде. Действительно, в этом вырожденном случае $\widetilde{k}_n \equiv \widetilde{\widetilde{k}}_n$, $\widetilde{\xi}_n \equiv \widetilde{\widetilde{\xi}}_n$,

$$\tau_{mn}^{(1)} \equiv \tau_{mn}^{(2)} = \theta_m \delta_{mn}, \quad \text{где } \delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{при } m = n \\ 0 & \text{при } m \neq n. \end{cases}$$

Подставляя эти соотношения в формулы (2) и (3), найдем

$$\widetilde{A}_m = \frac{\sigma_m^{(1)}}{i\theta_m \widetilde{\xi}_m h_1}, \qquad \widetilde{\widetilde{A}}_m = \left\{ \delta_{mq} + \frac{\sigma_m^{(2)}}{i\theta_m \widetilde{\widetilde{\xi}}_m h_2} \right\}.$$

В общем случае поле $\Psi\{x, h(x)\}$ неизвестно, поэтому формул (2) и (3) недостаточно для вычисления амплитуд нормальных волн. Мы будем искать это поле в виде разложения по полной системе ортогональных функций:

$$\Psi\{x, h(x)\} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right).$$

Подставляя это разложение и вспомогательное поле

$$\Phi_m = \Phi_m^{(3)} \equiv e^{-i\widetilde{\xi}_m x} \cos(\widetilde{k}_m z)$$

в формулу (1), получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\widetilde{\widetilde{\xi}}_n + \widetilde{\xi}_m)\, \tau_{mn}^{(1)} \exp[i(\widetilde{\widetilde{\xi}}_n - \widetilde{\xi}_m) L]\, \widetilde{\widetilde{A}}_n = \frac{2}{h_2}\{h_1 \theta_q \widetilde{\xi}_q \delta_{mq} - i\sigma_m^{(3)}\}. \qquad (4)$$

Бесконечная система алгебраических уравнений (2) — (4), где

$$\sigma_m^{(j)} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \int_0^L \left[\frac{\partial \Phi^{(j)}}{\partial z} - \frac{dh}{dx}\frac{\partial \Phi_m^{(j)}}{\partial x}\right]_{z=h(x)} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx,$$

является замкнутой. Решая ее численно (например методом редукции), мы получим искомые амплитуды $\widetilde{A}_m$ и $\widetilde{\widetilde{A}}_m$.

В качестве иллюстрации вычислим амплитуды рассеянных нормальных волн в волноводе с очень плавным изменением ширины на интервале $0 \leqslant x \leqslant L$. В таком волноводе рассеяние мало, поэтому в правой части формул (2) и (3) приближенно можно положить

$$\widetilde{A}_m = \widetilde{A}_m^{(0)} \equiv 0; \quad \widetilde{\widetilde{A}}_m = \widetilde{\widetilde{A}}_m^{(0)} \equiv \left\{\frac{\widetilde{\widetilde{\xi}}_q h_1}{\widetilde{\widetilde{\xi}}_q h_2}\right\}^{1/2} \exp\{i[\nu(L) - \widetilde{\widetilde{\xi}}_q L]\}\, \delta_{mq};$$

а при вычислении величины $\sigma_m^{(1)}$ и $\sigma_m^{(2)}$ поле Ψ можно задать в виде

$$\Psi = \Psi^{(0)}(x, z) \equiv \left\{\frac{\widetilde{\xi}_q h_1}{\sqrt{k^2 - \left[\frac{q\pi}{h(x)}\right]^2} h(x)}\right\}^{1/2} \exp[i\nu(x)] \cos\left[\frac{q\pi}{h(x)} z\right]$$

$$\text{при } 0 \leqslant x \leqslant L,$$

где $\nu(x) = \int_0^x \sqrt{k^2 - \left[\frac{q\pi}{h(y)}\right]^2}\, dy$. Тогда в первом приближении мы получим для амплитуд следующие выражения:

$$\widetilde{A}_m^{(1)} = \frac{1}{i\theta_m \widetilde{\xi}_m h_1}\left\{\widetilde{\sigma}_m^{(1)} - \frac{i}{2} h_2 \left(\frac{\widetilde{\widetilde{\xi}}_q h_1}{\widetilde{\widetilde{\xi}}_q h_2}\right)^{1/2} (\widetilde{\widetilde{\xi}}_q - \widetilde{\xi}_m)\, \tau_{mq}^{(1)} \exp\left(i[\nu(L) + \widetilde{\xi}_m L]\right)\right\}. \qquad (5)$$

$$\widetilde{\widetilde{A}}_m^{(1)} = \frac{1}{i\theta_m \widetilde{\widetilde{\xi}}_m h_2}\left\{\widetilde{\sigma}_m^{(2)} + \frac{i}{2} h_1 (\widetilde{\widetilde{\xi}}_m + \widetilde{\xi}_q)\, \tau_{mq}^{(2)}\right\}, \qquad (6)$$

где

$$\widetilde{\sigma}_m^{(j)} = \int_0^L \left\{\left[\frac{\partial \Phi_m^{(j)}}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_m^{(j)}}{\partial x}\frac{dh}{dx}\right] \Psi^{(0)}\right\}_{z=h(x)} dx.$$

Эти формулы эквивалентны соответственным формулам, полученным ранее другим методом в работах [3, 4].

Рассмотрим волновод, ширина которого в интервале $0 \leqslant x \leqslant L$ меняется по линейному закону

$$h(x) = h^0(x) \equiv h_1 + \beta x, \quad \text{где } \beta = \frac{h_2 - h_1}{L}.$$

Мы будем считать,что $\beta \ll 1$, $kL \gg 1$. Выполняя вычисления интегралов в формулах (5) и (6) методом быстрейшего спуска, получим

$$\widetilde{A}_m^{(1)} = \frac{(-1)^{q-1/2}\beta}{\theta_m \widetilde{\xi}_m h_1} \left\{ (-1)^m \frac{(k^2 + \widetilde{\xi}_q \widetilde{\xi}_m)}{(\widetilde{\xi}_q + \widetilde{\xi}_m)^2} + \right.$$

$$+ \left(\frac{\widetilde{\xi}_q h_1}{\widetilde{\widetilde{\xi}}_q h_2} \right)^{1/2} \left[\widetilde{k}_m \frac{[k^2 (\widetilde{\widetilde{\xi}}_q + \widetilde{\xi}_m) + 2\widetilde{\widetilde{\xi}}_q \widetilde{\widetilde{k}}_q^2}{2\widetilde{\widetilde{\xi}}_q^2 h_2 (\widetilde{\widetilde{\xi}}_q + \widetilde{\xi}_m)^3} \sin(\widetilde{k}_m h_2) - \right.$$

$$\left. \left. - \frac{(k^2 + \widetilde{\widetilde{\xi}}_q \widetilde{\xi}_m)}{(\widetilde{\widetilde{\xi}}_q + \widetilde{\xi}_m)^2} \cos(\widetilde{k}_m h_2) \right] e^{i[\nu(L) + \widetilde{\xi}_m L]} \right\};$$

$$\widetilde{\widetilde{A}}_{m(m \neq q)}^{(1)} = \frac{(-1)^{q+1/2}\beta}{\theta_m \widetilde{\widetilde{\xi}}_m h_2} \left\{ \widetilde{\widetilde{k}}_m \frac{[2\widetilde{\xi}_q \widetilde{k}_q^2 + k^2 (\widetilde{\xi}_q - \widetilde{\widetilde{\xi}}_m)]}{2\widetilde{\xi}_q^2 h_1 (\widetilde{\xi}_q - \widetilde{\widetilde{\xi}}_m)^3} \sin(\widetilde{\widetilde{k}}_m h_1) - \right.$$

$$\left. - \frac{(k^2 - \widetilde{\widetilde{\xi}}_m \widetilde{\xi}_q)}{(\widetilde{\xi}_q - \widetilde{\widetilde{\xi}}_m)^2} \cos(\widetilde{\widetilde{k}}_m h_1) + (-1)^m \left(\frac{\widetilde{\xi}_q h_1}{\widetilde{\widetilde{\xi}}_q h_2} \right)^{1/2} \frac{(k^2 - \widetilde{\widetilde{\xi}}_q \widetilde{\xi}_m)}{(\widetilde{\widetilde{\xi}}_q - \widetilde{\widetilde{\xi}}_m)^2} e^{i[\nu(L) - \widetilde{\widetilde{\xi}}_m L]} \right\}.$$

Из этих формул видно, что рассеянное поле можно сделать сколь угодно малым, уменьшая наклон стенки.

Оценим влияние малых неровностей на распространение звука в волноводе с линейным (в среднем) изменением ширины. Уравнение верхней стенки волновода напишем в виде $z = h^0(x) + \zeta(x)$, где $\zeta(x)$ — однородная статистическая функция точки. Мы будем считать, что величина ζ удовлетворяет соотношениям $|k\zeta| \ll 1$, $\left|\frac{d\zeta}{dx}\right| \ll 1$. Тогда влияние неровностей ζ на распространение звука можно оценить методом малых возмущений, принимая за нулевое приближение решение, полученное для волновода с линейным изменением ширины. Выполняя соответственные вычисления, получим

$$\Delta \widetilde{A}_m \equiv \{(\widetilde{A}_m)_{\zeta \neq 0} - (\widetilde{A}_m)_{\zeta = 0}\} = \frac{(-1)^{q+1}}{i\theta_m \widetilde{\xi}_m h_1} \int_0^L \left\{ \frac{\widetilde{\xi}_q h_1}{\gamma_q(x) h^0(x)} \right\}^{1/2} \times$$

$$\times \left\{ \widetilde{k}_m^2 \zeta(x) + i\widetilde{\xi}_m \frac{d\zeta}{dx} \right\} e^{i[\nu(x) + \widetilde{\xi}_m x]} \cos[\widetilde{k}_m h^0(x)]\, dx;$$

$$\Delta \widetilde{\widetilde{A}}_m = \{(\widetilde{\widetilde{A}}_m)_{\zeta \neq 0} - (\widetilde{\widetilde{A}}_m)_{\zeta = 0}\} = \frac{(-1)^{q+1}}{i\theta_m \widetilde{\widetilde{\xi}}_m h_2} \int_0^L \left\{ \frac{\widetilde{\xi}_q h_1}{\gamma_q(x) h^0(x)} \right\}^{1/2} \times$$

$$\times \left\{ \widetilde{\widetilde{k}}_m \zeta(x) - i\widetilde{\widetilde{\xi}}_m \frac{d\zeta}{dx} \right\} e^{i[\nu(x) - \widetilde{\widetilde{\xi}}_m x]} \cos[\widetilde{\widetilde{k}}_m h^0(x)]\, dx,$$

$$\text{где } \gamma_q(x) = \sqrt{k^2 - \left[\frac{q\pi}{h^0(x)}\right]^2}.$$

Найдем усредненные характеристики рассеянного поля. Статистические свойства неровностей мы будем характеризовать функцией корреляции: $R(x_2 - x_1) = \langle \zeta(x_2)\zeta(x_1) \rangle$. Предполагая, что характерный масштаб неровностей мал по сравнению с длиной нерегулярного участка, получим

$$\langle \Delta \widetilde{A}_m \Delta \widetilde{A}_m^* \rangle = \frac{2\pi}{(\theta_m \overline{\xi}_m h_1)^2} \int_0^L \left\{ \frac{\widetilde{\xi}_q h_1}{\gamma_q(x) h^0(x)} \right\} \{k^2 + \widetilde{\xi}_m \gamma_q(x)\}^2 \times$$

$$\times \cos^2[\widetilde{k}_m h^0(x)]\, G[\gamma_q(x) + \widetilde{\xi}_m]\, dx, \qquad (7)$$

$$\langle \Delta \tilde{\tilde{A}}_m \Delta \tilde{\tilde{A}}_m^* \rangle = \frac{2\pi}{(\theta_m \tilde{\xi}_m h_2)^2} \int_0^L \left\{ \frac{\tilde{\xi}_q h_1}{\gamma_q(x) h^0(x)} \right\} \{k^2 - \tilde{\xi}_m \gamma_q(x)\}^2 \cos^2 [\tilde{\tilde{k}}_m h^0(x)] \times$$

$$\times G[\gamma_q(x) - \tilde{\tilde{\xi}}_m]\, dx, \qquad (8)$$

где $G(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-i\Omega\tau} d\tau$ — спектральная плотность интенсивности функции ζ для волнового числа Ω. Поскольку подынтегральные выражения в формулах (7) и (8) положительны, то величины $\langle \Delta \tilde{A}_m \Delta \tilde{A}_m^* \rangle$ и $\langle \Delta \tilde{\tilde{A}}_m \Delta \tilde{\tilde{A}}_m^* \rangle$ растут при увеличении L. Это означает, что рассеяние, обусловленное малыми статистическими неровностями, увеличивается при увеличении длины нерегулярного участка. При нулевой падающей волне величины $\langle \Delta \tilde{A}_m \Delta \tilde{A}_m^* \rangle$ и $\langle \Delta \tilde{\tilde{A}}_m \Delta \tilde{\tilde{A}}_m^* \rangle$ соответственно равны:

$$\langle \Delta \tilde{A}_m \Delta \tilde{A}_m^* \rangle = \frac{\pi h_1 L}{(h_2 - h_1)} \left\{ \frac{k(k + \tilde{\xi}_m)}{\theta_m \tilde{\xi}_m h_1} \right\}^2 \left\{ \ln \left(\frac{h_2}{h_1} \right) + \right.$$

$$\left. + [Ci(2\tilde{k}_m h_2) - Ci(2\tilde{k}_m h_1)] \right\} G(k + \tilde{\xi}_m);$$

$$\langle \Delta \tilde{\tilde{A}}_m \Delta \tilde{\tilde{A}}_m^* \rangle = \frac{\pi h_1 L}{(h_2 - h_1)} \left\{ \frac{k(k - \tilde{\tilde{\xi}}_m)}{\theta_m \tilde{\tilde{\xi}}_m h_2} \right\}^2 \left\{ \ln \left(\frac{h_2}{h_1} \right) + \right.$$

$$\left. + [Ci(2\tilde{\tilde{k}}_m h_2) - Ci(2\tilde{\tilde{k}}_m h_1)] \right\} G(k - \tilde{\tilde{\xi}}_m),$$

где Cix — интегральный косинус.

При $\beta = 0$ (верхняя стенка в среднем совпадает с плоскостью $z = h_1$) формулы (7) и (8) упрощаются и принимают следующий вид:

$$\langle \Delta \tilde{A}_m \Delta \tilde{A}_m^* \rangle = \frac{2\pi L}{(\theta_m \tilde{\xi}_m h_1)^2} (k^2 + \tilde{\xi}_q \tilde{\xi}_m)^2 G(\tilde{\xi}_q + \tilde{\xi}_m);$$

$$\langle \Delta \tilde{\tilde{A}}_m \Delta \tilde{\tilde{A}}_m^* \rangle = \frac{2\pi L}{(\theta_m \tilde{\xi}_m h_1)^2} (k^2 - \tilde{\xi}_q \tilde{\xi}_m)^2 G(\tilde{\xi}_q - \tilde{\xi}_m).$$

Эти выражения были получены ранее в работе [5]; соответственные выражения для мягкой стенки были найдены в работе [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Лапин. Распространение звука в неоднородных волноводах. Акуст. ж., 1967, 13, 2, 231—234.
2. И. Е. Тамм. Основы теории электричества. М., «Наука», 1966.
3. Б. З. Каценеленбаум. Теория нерегулярных волноводов с медленно меняющимися параметрами. М., Изд-во АН СССР, 1961.
4. В. В. Шевченко. Неоднородные акустические волноводы. Акуст. ж., 1961, 7, 4, 484—491.
5. А. Д. Лапин. К теории рассеяния волн в нерегулярных волноводах (канд. диссертация). Акустический ин-т АН СССР, 1958.
6. М. А. Исакович. Рассеяние звуковых волн на малых неоднородностях в волноводе. Акуст. ж., 1957, 3, 1, 37—45.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
12 августа 1966 г.