АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XIV 1968 Вып. 2

УДК 534,222:532.528

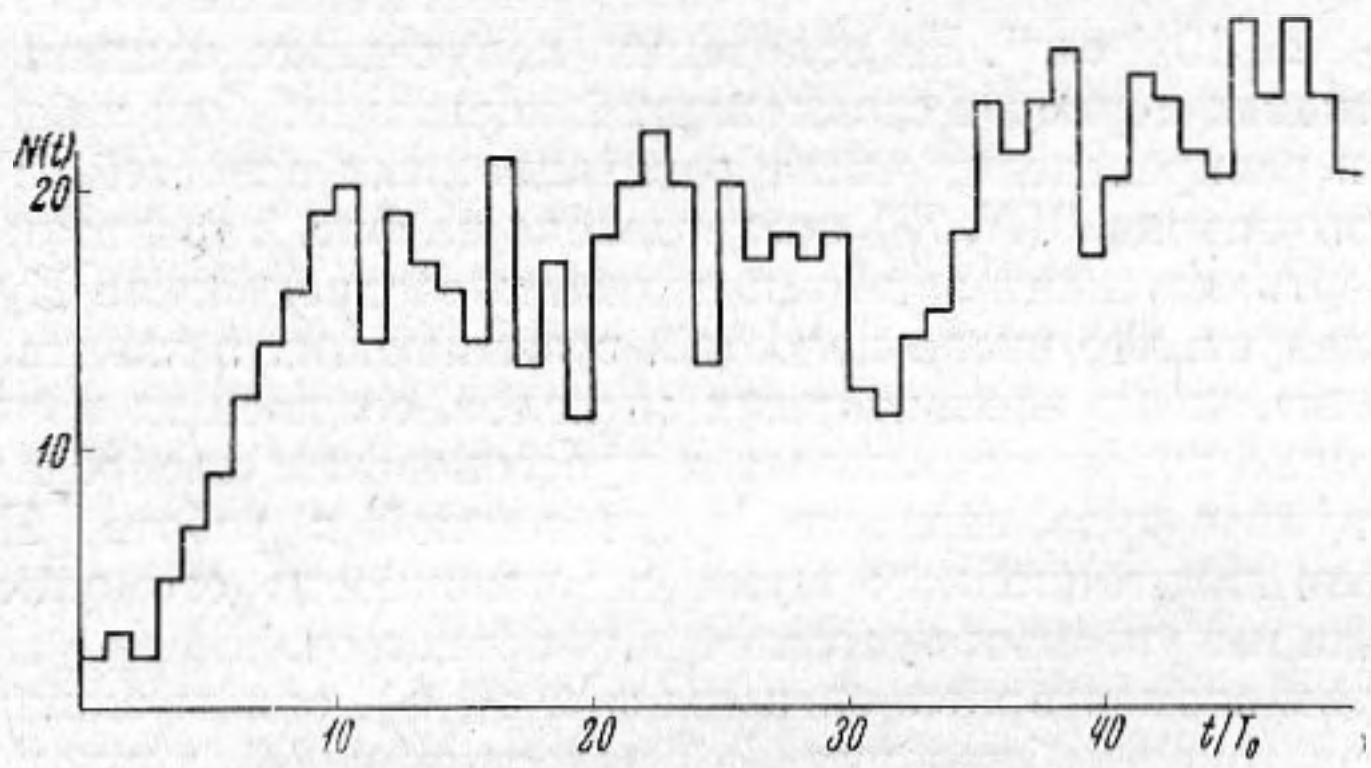
НЕКОТОРЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КАВИТАЦИОННЫХ ЯВЛЕНИЙ

В. А. Акуличев, В. В. Ольшевский

Приводятся экспериментальные данные о распределении числа кавитационных полостей в кавитационной области. Рассматриваются элементарные сигналы, излучаемые полостями. Обсуждаются особенности спектров кавитационного шума и влияние на их форму различных параметров акустической кавитации.

В работе [1] была предложена статистическая модель и получены общие соотношения для характеристик кавитационного шума, порождаемого совокупностью кавитационных полостей в некоторой области жидкости.

Рассматриваемая модель кавитационного шума основана на предположении, что случайная функция, определяющая число элементарных сигналов, создающих шум в точке наблюдения в некоторый момент времени,



Фиг. 1

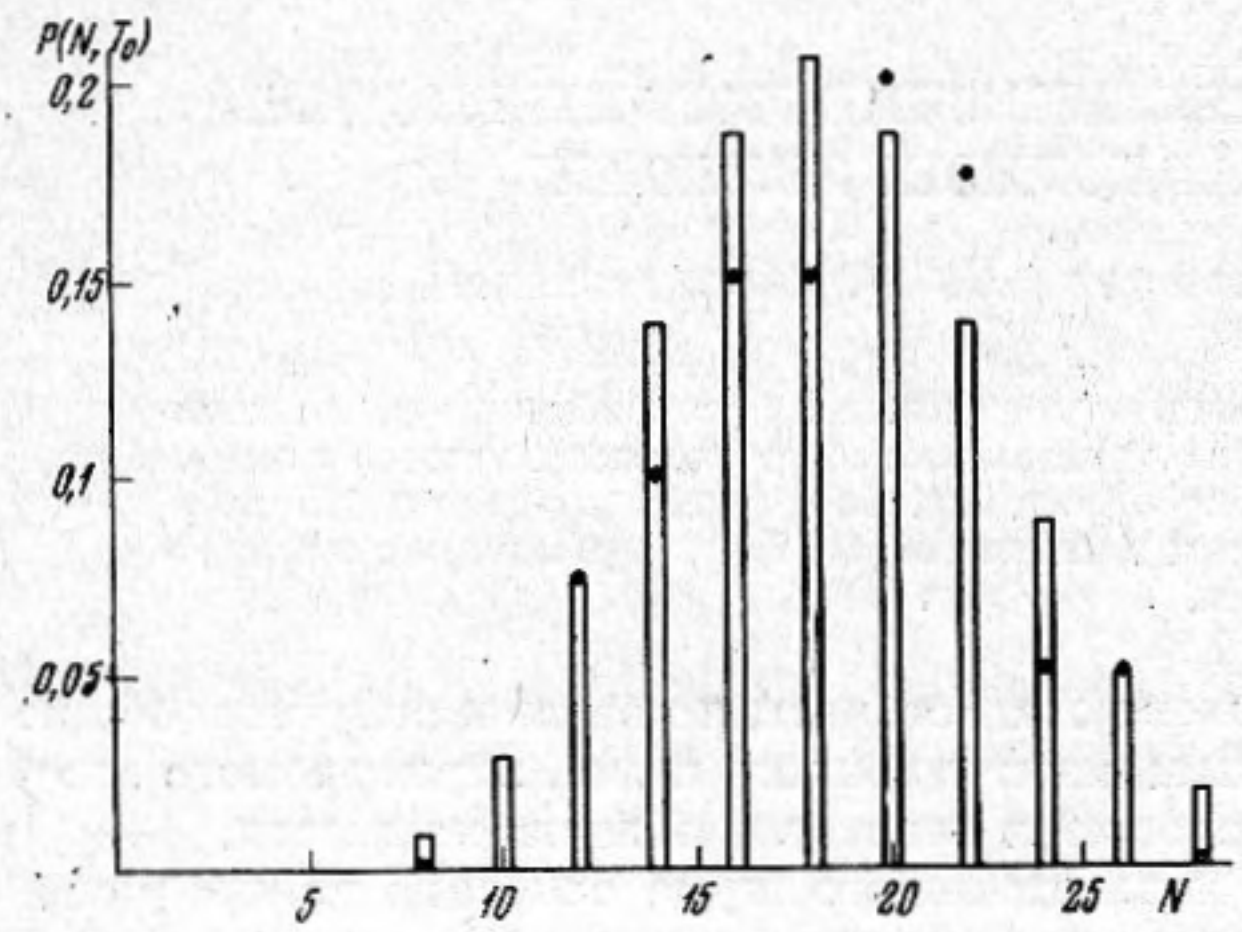
подчиняется закону распределения Пуассона. Это означает, что число кавитационных полостей N, наблюдаемых в кавитационной области D за период T_0 возбуждающего звукового поля, также описывается пуассоновским распределением:

$$P(N, T_0) = \frac{\langle N \rangle^N}{N!} \exp\ (-\langle N \rangle), \tag{1}$$

где $P(N, T_0)$ — вероятность того, что в течение периода T_0 в области D существует точно N кавитационных полостей, $\langle N \rangle$ — среднее число полостей в рассматриваемой области.

Справедливость закона (1) была проверена экспериментально при наблюдении реальных кавитационных процессов. Кавитация создавалась при звуковом давлении около 2,0 *атм* на частоте 15 *кгц* в фокальной зоне

цилиндрического концентратора. Возникающие при этом кавитационные полости фотографировались высокоскоростной камерой ССКС-3, которая позволяла регистрировать число полостей, возникающих в течение каждого последовательного периода T_0 звукового поля [2]. На фиг. 1 представлены результаты обработки полученных кинограмм, соответствующих последовательным периодам звукового поля. По оси абсцисс отложено относительное время t / T_0, определяющее номер наблюдаемого периода, а по оси ординат — число кавитационных полостей $N(t)$; начало координат соответствует моменту возникновения кавитации в фокальной зоне концентратора после включения звукового поля. Как видно, в течение нескольких периодов наблюдается нестационарное развитие кавитационной области, после чего устанавливается стационарный режим, характеризуемый отсутствием зависимости $\langle N \rangle$ от текущего момента отсчета. В описываемых экспериментах стационарная кавитация наблюдалась в области со средним объемом $V_D \simeq 6 \cdot 10^{-4}$ *см*^{3}, среднее число полостей в наблюдаемой области оказалось равным $\langle N \rangle = 19$; таким образом, средняя объемная концентрация полостей в кавитационной области была равна $\langle N \rangle / \langle V_D \rangle \simeq 10^{+4}$ *см*$^{-3}$. На основании полученных данных для сорока последовательных периодов стационарной кавитации был найден эмпирический закон распределения числа кавитационных полостей. Гистограмма эмпирического закона $P(N, T_0)$ представлена на фиг. 2 точками; там же для $\langle N \rangle = 19$ вертикальными линиями показано распределение Пуассона (1). Из фиг. 2 следует, что число полостей, возникающих в кавитационной области, а значит, число элементарных сигналов, создающих кавитационный шум, достаточно хорошо описывается пуассоновским распределением. Это свидетельствует о правомерности предложенной в работе [1] статистической модели кавитационного шума и возможности его описания с помощью теории импульсных пуассоновских процессов.



Фиг. 2

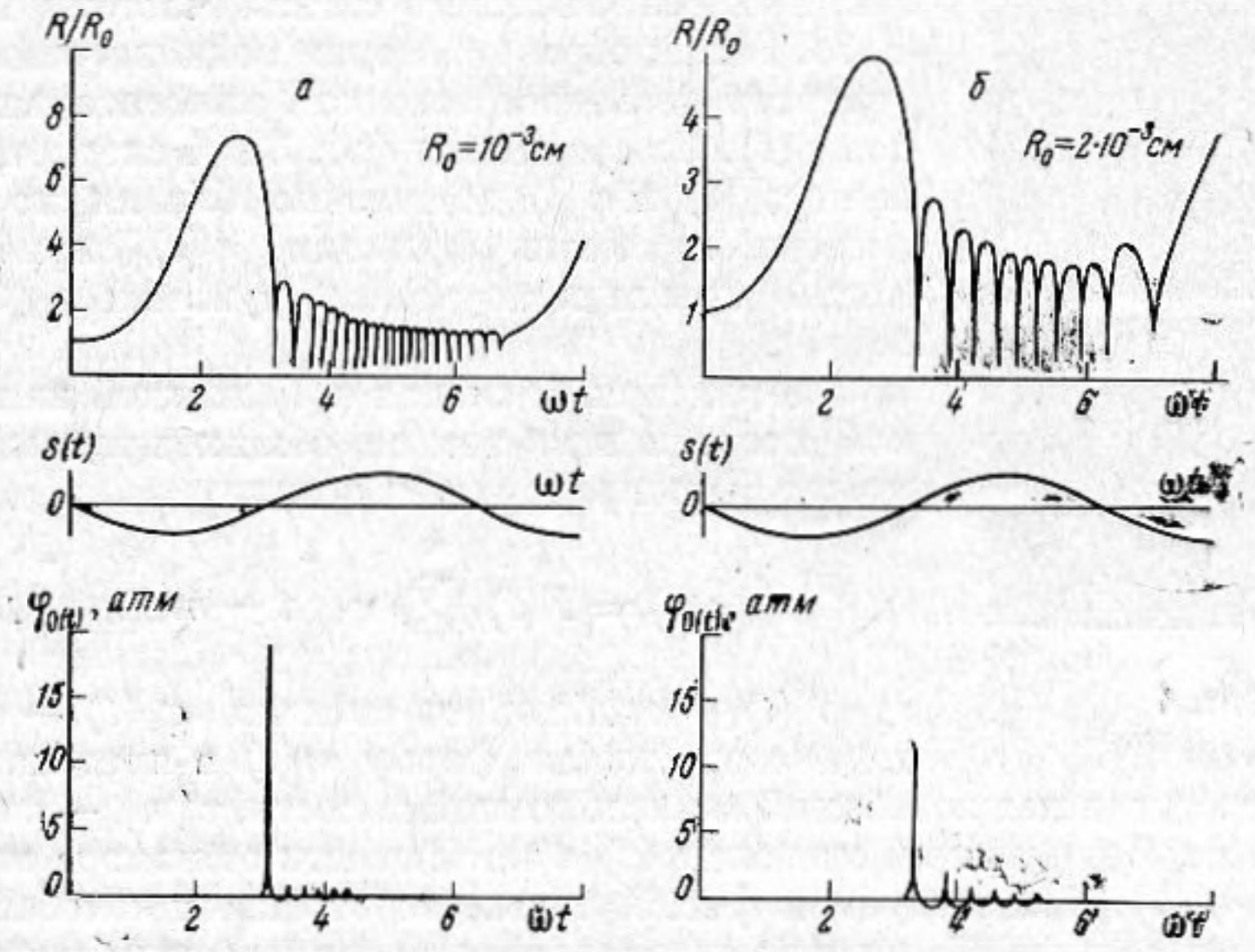
Рассмотрим элементарные сигналы $\varphi(t, \varepsilon_k, \nu_l)$, описывающие давление, создаваемое в точке наблюдения k-й полостью в l-й период звукового поля [1].

Известно [2, 3], что давление $\varphi(t)$ в стационарном режиме зависит главным образом от давления $s(t)$ возбуждающей звуковой волны и от газосодержания кавитационной полости, т. е. от равновесного радиуса R_0. Под R_0 понимается радиус газового пузырька, который можно было бы зафиксировать, если бы звуковое поле исчезло, а оставшийся вместо кавитационной полости пузырек не успел бы раствориться. При акустической кавитации поведение полостей, а следовательно, порождаемые ими различные эффекты, определяются именно этим равновесным радиусом *). Действительно, изучение нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих поведение кавитационных полостей, показывает [2], что величина равновесного радиуса R_0 определяет интенсивность и форму звуковой волны, излучаемой кавитационной полостью. На фиг. 3 представлены примеры зависимости от времени радиуса кавитационной полости $R(t)$, давления звукового поля $s(t)$

*) В частности, в работе [4] отмечается существенное влияние газосодержания полостей на эффективность кавитации при эрозии и звуколюминесценции.

и давления $\varphi_0(t)$ сигнала на расстоянии 1 *см* от полости. Функции $R(t)$ и $\varphi_0(t)$ получены при численном решении уравнения Кирквуда — Бете [5] для стационарных пульсаций пузырьков с равновесными радиусами $R_0 = 10^{-3}$ *см* (фиг. 3, *а*) и $R_0 = 2 \cdot 10^{-3}$ *см* (фиг. 3, *б*); при этом функция $s(t)$ представляет собой гармоническое колебание частоты 10 *кгц* и амплитуды 1,2 *атм*.

Функция $\varphi_0(t)$ определяет форму элементарного сигнала $\varphi(t)$ в точке наблюдения. Если считать, что среда в первом приближении является ли-



Фиг. 3

нейной с комплексной частотной характеристикой $k(\omega, r)$, то функция $\varphi(t)$ может быть найдена с помощью следующего соотношения:

$$\varphi(t) = A \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(t - r/c - t')\, h(t', r)\, dt\,, \tag{2}$$

где

$$h(t, r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k(\omega, r)\ \exp\ (j\omega t)\, d\omega$$

— переходная функция среды, r — расстояние от точки наблюдения до рассматриваемой кавитационной области, характерный размер которой $R_D \ll r$, c — скорость распространения, параметр A определяет изменение уровня сигнала $\varphi_0(t)$ как вследствие расхождения излучаемой волны, так и вследствие потерь, связанных с возможными нелинейными эффектами *). При этих предположениях можно считать, что для фиксированного r между спектрами $g(\omega)$ и $g_0(\omega)$ сигналов $\varphi(t)$ и $\varphi_0(t)$ имеет место соотношение

$$|g(\omega)| = A\,|g_0(\omega)|\,|k(\omega)|. \tag{3}$$

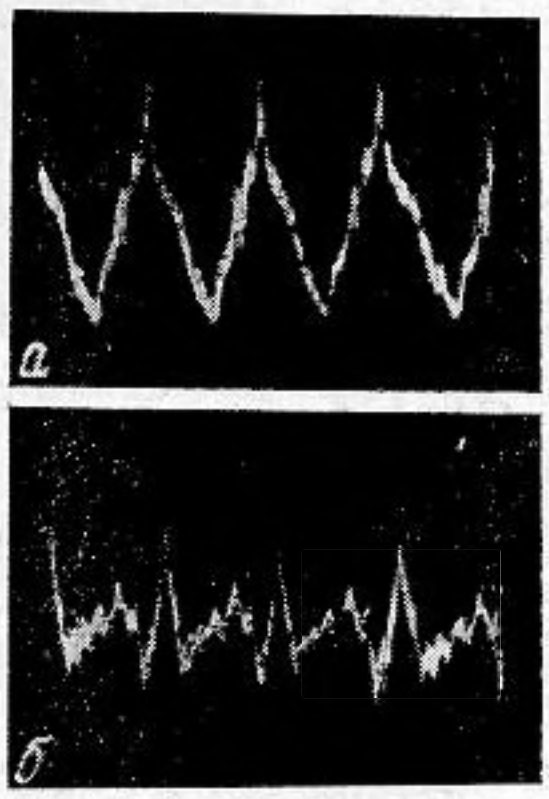
Обычно кавитационные шумы исследуются в диапазоне частот, не превышающем нескольких мегагерц, в непосредственной близости от кавитационной области [2, 3]. В таких условиях с достаточной степенью точности можно считать спектры $g(\omega)$ и $g_0(\omega)$ совпадающими по форме, так как при

*) Более общим, чем (2), представлением функции $\varphi(t)$ является

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A\,\{\varphi_0(t - r/c - t')\}\, h(t', r)\, dt',$$

где $A\{\ \}$ — оператор, учитывающий нелинейные эффекты, влияющие на форму $\varphi(t)$ при распространении сигнала. В первом приближении, однако, эти эффекты можно учесть соответствующим выбором $A\{\ \} = A = \text{const}$.

этом $|k(\omega, r)| \simeq \text{const}$. Это подтверждает во многих случаях наблюдения кавитационных шумов. На фиг. 4 показаны типичные осциллограммы кавитационных сигналов, полученных при возбуждении кавитации в водопроводной воде на частоте 10 *кгц* при амплитуде давления около 1,0 *атм*. Сигналы принимались гидрофоном в полосе частот до 600 *кгц* на расстоянии 1 *см* от одиночной кавитационной полости [2]. На фиг. 4, *а* представлена осциллограмма сигналов, принимаемых в широкой полосе частот, на фиг. 4, *б* — при использовании заграждающего фильтра, ослабляющего сигнал частоты 10 *кгц* на 40 *дб*. Таким образом, вторая осциллограмма иллюстрирует последовательность элементарных сигналов $\varphi(t)$. Из сравнения фиг. 3 и 4 следует, что сигналы $\varphi_0(t)$ и $\varphi(t)$ достаточно близки по форме и поэтому изучение функции $\varphi(t)$ приближенно можно свести к изучению функции $\varphi_0(t)$, и наоборот.



Фиг. 4

Элементарный сигнал $\varphi(t)$ каждой кавитационной полости при весьма общих предположениях может быть представлен в виде

$$\varphi(t) = F(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_1\left[t - m\tau(m)\right], \qquad (4)$$

где $F(t)$ — огибающая сигнала, $\varphi_1(t)$ — функция, характеризующая форму $\varphi(t)$ в пределах одного периода собственных колебаний кавитационной полости, $\tau(m)$ — определяет закон фазовой модуляции сигнала $\varphi(t)$ в зависимости от номера m периода функции $\varphi_1(t)$. Как следует из фиг. 3, период собственных колебаний $\tau(m)$ каждой кавитационной полости определяется ее равновесным радиусом R_0, а также изменением давления $s(t)$ звукового поля. При этом [2] от значения R_0 зависит центральная частота Ω_0 спектра $g(\omega)$ элементарного сигнала, а изменение давления $s(t)$ определяет характер и глубину фазовой модуляции $\varphi(t)$, т. е. вид функции $\tau(m)$.

Найдем амплитудный спектр $g(\omega)$, который, согласно формуле (4) определяется следующим образом:

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(t)\varphi_1[t - m\tau(m)] \exp(-j\omega t)\, dt.$$

Применяя теорему о свертке, получаем

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_F(\omega - x) g_1(x) \exp[-jm\tau(m)x] dx, \qquad (5)$$

где $g_F(\omega)$ и $g_1(\omega)$ — амплитудные спектры функций $F(t)$ и $\varphi_1(t)$ соответственно. Расчет спектра $g(\omega)$ при произвольных параметрах элементарных сигналов $\varphi(t)$ может быть проведен только численными методами, однако, общее представление о виде спектров $g(\omega)$ дает рассмотрение некоторых частных случаев. Например, когда фазовая модуляция в пределах эффективной длительности $\Delta_{\text{эфф}} = F_{\max}^{-2}(t) \int_{-\infty}^{\infty} F^2(t)\, dt$ незначительна и ею можно пренебречь, тогда $\tau(m) = \tau_0$. Это соответствует случаю, когда первые несколько периодов осцилляций $\varphi_1(t)$ содержат основную энергию сигнала $\varphi(t)$ (пример такого рода сигнала показан на фиг. 3, *а*). Учитывая, что

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\,(-jm\tau_0 x) = \Omega_0 \sum_{m=1}^{\infty} \delta(x - m\Omega_0),$$

где $\Omega_0 = 2\pi / \tau_0$ — центральная частота спектра сигнала $\varphi(t)$, из формулы (5) получаем

$$g(\omega) = \frac{\Omega_0}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} g_F(\omega - m\Omega_0) g_1(m\Omega_0). \tag{6}$$

Отсюда следует, что спектр элементарного сигнала представляет собой совокупность сплошных спектров с максимумами

$$g_{\max}^{(m)}(\omega) = \frac{\Omega_0}{2\pi} g_F(0) g_1(m\Omega_0),$$

соответствующими частотам $\omega_m = m\Omega_0$, $m = 1, 2, 3 \ldots$; форма этих спектров определяется видом огибающей $F(t)$, а уровень — видом функции $\varphi_1(t)$.

Влияние фазовой модуляции сигнала $\varphi(t)$ на спектр $g(\omega)$ должно проявиться в расширении сплошных спектров на каждой из частот ω_m, причем это расширение должно увеличиваться с номером m. Спектр $g(\omega)$ становится сглаженным, во-первых, когда в пределах $\Delta_{\text{эфф}}$ эффект фазовой модуляции велик (такой случай показан на фиг. 3, *б*), и, во-вторых, когда сигнал $\varphi(t)$ состоит из одного — двух периодов, т. е. $\tau_0 \simeq \Delta_{\text{эфф}}$ (такой случай показан на фиг. 3, *а*).

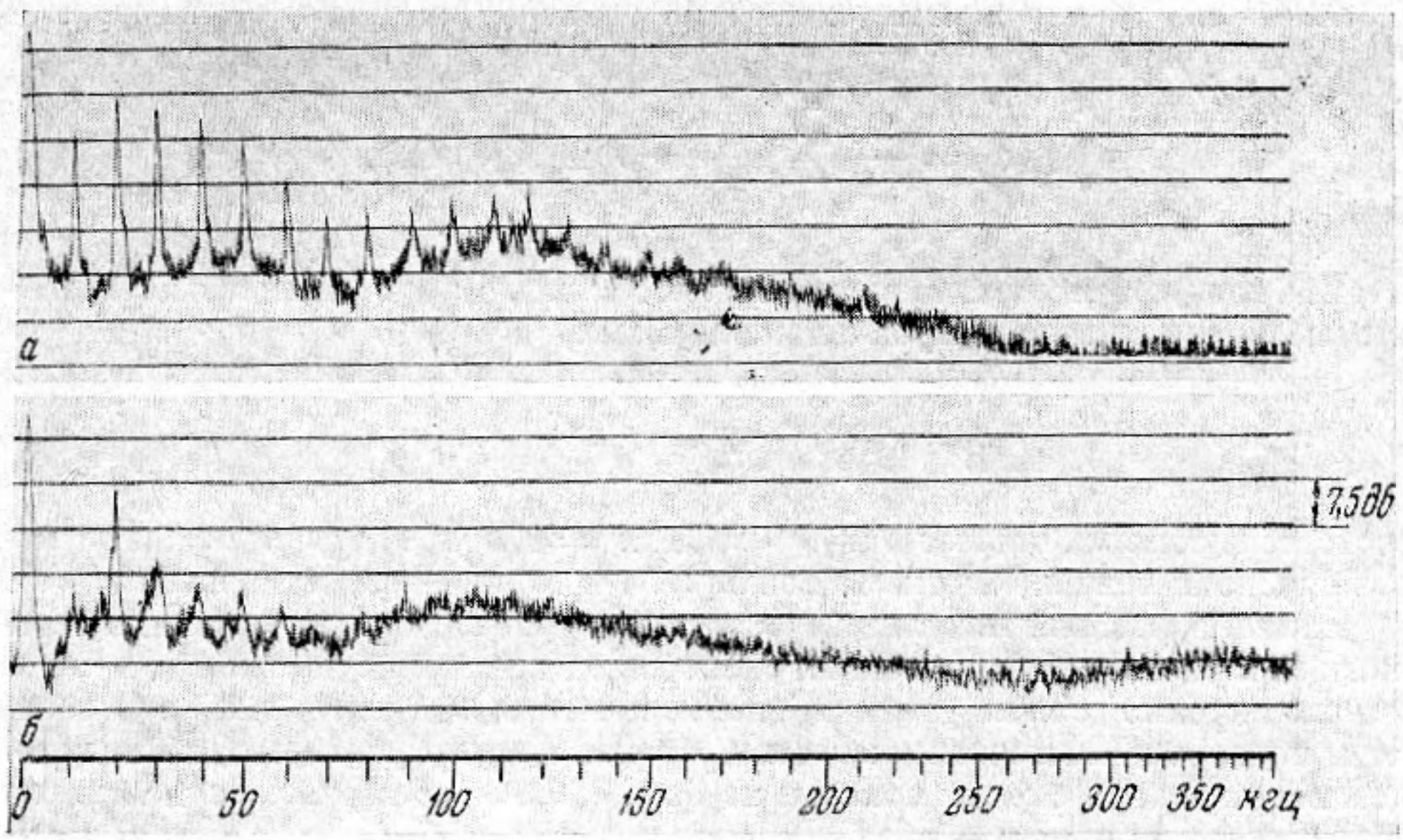
Соотношение (5) и его частная форма (6), описывающие спектр $g(\omega)$ элементарного сигнала одной кавитационной полости, позволяют перейти к рассмотрению спектров кавитационного шума, создаваемого в области D совокупностью полостей. Как показано в работе [1], энергетический спектр кавитационного шума $G_F(\omega)$ определяется видом спектра $g(\omega)$ и статистическими характеристиками случайных параметров ε и ν, деформирующих этот спектр, причем параметр ε определяет статистичность характеристик совокупности полостей для фиксированного момента времени, а параметр ν — флюктуации характеристик каждой полости во времени. Наиболее характерными и существенными случайными параметрами являются равновесные радиусы полостей, которые, как указывалось выше, определяют спектры $g_F(\omega)$ и $g_1(\omega)$, а также закон фазовой модуляции $\tau(m)$. Спектр каждой кавитационной полости на основании (5) с учетом влияния случайных параметров ε и ν представляется в виде

$$g(\omega, \varepsilon, \nu) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_F(\omega - x, \varepsilon, \nu) g_1(x, \varepsilon, \nu) \times \\ \times \exp[-jm\tau(m, \varepsilon, \nu)x] dx. \tag{7}$$

Если флюктуации каждой кавитационной полости во времени таковы, что совокупность сигналов $\varphi(t, \varepsilon, \nu)$ составляют эргодический ансамбль, а кавитационный шум является пуассоновским процессом, то изучение статистических характеристик шума совокупности кавитационных полостей сводится, как это следует из теоремы наложения возмущений [1], к изучению статистических характеристик сигналов $\varphi(t, \varepsilon, \nu)$ одной кавитационной полости. В этом случае спектр $g(\omega)$ можно считать зависящим только от одного случайного параметра ν, причем плотность распределения $W(\nu)$ будет определяться распределением флюктуаций равновесных радиусов любой кавитационной полости.

Для случая малой фазовой модуляции под параметром ν понимается частота Ω_0, так что с учетом выражения (6) мы получаем

$$g(\omega, \nu) = \frac{\nu}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} g_F(\omega - m\nu, \nu) g_1(m\nu). \tag{8}$$



Фиг. 5

Как показано в работе [1], энергетический спектр $G_F(\omega)$ кавитационного шума определяется статистическими средними $\langle\overline{|g(\omega,\varepsilon,\nu)|^2}\rangle$ и $\overline{\langle|g(\omega,\varepsilon,\nu)|^2\rangle}$, получаемыми усреднением по ансамблю (по параметру ε, обозначено скобками) и по времени (по параметру ν, обозначено чертой вверху). С учетом представления (8), усреднение должно производиться только по параметру ν. Найдем статистические средние $\overline{|g(\omega,\nu)|^2}$ и $\overline{|g(\omega,\nu)|}^2$, задав плотность распределения $W(\nu)$:

$$\overline{|g(\omega,\nu)|^2}=\frac{1}{(2\pi)^2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\nu'\nu''g_F(\omega-m\nu'\,\nu')\times$$

$$\times g_F^*(\omega-r\nu'',\nu'')g_1(m\nu')g_1(r\nu'')W(\nu')W(\nu'')d\nu'\,d\nu'', \qquad (9)$$

$$\overline{|g(\omega,\nu)|}^2=\frac{1}{(2\pi)^2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\nu^2g_F(\omega-m\nu,\nu)\times$$

$$\times g_F^*(\omega-r\nu,\nu)g_1(m\nu)g_1(r\nu)W(\nu)d\nu. \qquad (10)$$

Если флюктуации сигналов каждой кавитационной полости происходят в каждые последовательные периоды звукового поля статистически независимо, то с учетом формул (9) и (10) для сплошной $G_{FN}(\omega)$ и дискретной $G_{FS}(\omega)$ частей энергетического спектра кавитационного шума мы имеем выражения [1]:

$$G_{FN}(\omega)=\frac{\langle N_1\rangle}{\pi}[\overline{|g(\omega,\nu)|^2}-\overline{|g(\omega,\nu)|}^2], \qquad (11)$$

$$G_{FS}(\omega)=\frac{\langle N_1\rangle}{\pi}\omega_0\,\overline{|g(\omega,\nu)|}^2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_0), \qquad (12)$$

где $\langle N_1\rangle=\langle N\rangle/T_0$ — плотность пуассоновского процесса, а $\omega_0=2\pi/T_0$.

Из соотношений (9) — (12) следует, что форма сплошной части и огибающая дискретной части спектра кавитационного шума зависят от формы

спектра $g(\omega)$ элементарных сигналов и распределения $W(\nu)$ случайных параметров ν, которые определяются равновесными радиусами кавитационных полостей.

На фиг. 5 представлены типичные спектрограммы кавитационного шума, полученные при возбуждении кавитации в водопроводной воде гармоническим сигналом частоты 10 *кгц* при давлениях 1,5 *атм* (фиг. 5, *а*) и 2,0 *атм* (фиг. 5, *б*). Спектр был измерен с помощью гетеродинного анализатора с разрешающей способностью по частоте около 400 *гц*. Для выявления тонкой структуры спектра дискретная составляющая на частоте 10 *кгц* ослаблялась заграждающим фильтром на 17 *дб* (ее истинный уровень указан на спектрограммах точкой). На приведенных спектрограммах хорошо видны как сплошная, так и дискретная части спектра кавитационного шума. В сплошной части спектра четко проявляются максимумы, положение которых на оси частот соответствует средней частоте спектра элементарных сигналов $\varphi(t)$ и ее гармоникам. Интересно отметить, что наиболее выраженные максимумы на обеих спектрограммах лежат вблизи частот 100—120 *кгц*, что свидетельствует о наличии в кавитационной области полостей с равновесными радиусами около $3 \cdot 10^{-3}$ *см*. Достаточно четко выражены также максимумы на частотах 320—360 *кгц*, являющиеся в некотором смысле третьей гармоникой частоты, соответствующей основному максимуму. При этом ширина сплошного спектра вблизи частот 100—120 *кгц* оказывается приблизительно втрое меньше ширины спектра вблизи частот 320—360 *кгц*. Это определяется существенным отличием вида элементарных сигналов от гармонического и наличием фазовой модуляции. Из фиг. 5 следует также, что с увеличением интенсивности кавитации происходит сглаживание сплошной части спектра при общем возрастании ее энергии; это свидетельствует о расширении спектра $g(\omega)$ или увеличении дисперсии распределения $W(\nu)$.

Следует также отметить некоторое увеличение уровня сплошной части спектра в области частот 30—60 *кгц*; это, по-видимому, связано с независимыми флюктуациями моментов возникновения и амплитуд элементарных сигналов во времени, на что впервые указал Бон [3].

Из приведенных спектрограмм видно, что огибающая дискретных составляющих в общем повторяет сплошную часть спектра, причем увеличение интенсивности кавитации приводит к их вырождению; последнее свидетельствует об увеличении статистичности кавитационного процесса при увеличении интенсивности кавитации.

Все это согласуется с данными об изменении формы элементарных сигналов, характерных для кавитации различной интенсивности [2, 3] и приведенными выше соотношениями (5)—(7) и (9)—(12), с помощью которых можно количественно описать различные наблюдаемые закономерности кавитационного шума.

Авторы благодарят Л. Д. Розенберга за обсуждение полученных результатов и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Акуличев, В. В. Ольшевский. Связь статистических характеристик акустической кавитации и кавитационного шума. Акуст. ж., 1968, **14**, 1, 30—36.
2. В. А. Акуличев. Исследование возникновения и протекания акустической кавитации (канд. дис.). Акустический институт АН СССР, 1966.
3. L. Bohn. Schalldruckverlauf und Spektrum bei der Schwingungskavitation. Acustica, 1957, **7**, 4, 201—216.
4. М. Г. Сиротюк. Влияние температуры и газосодержания жидкости на кавитационные процессы. Акуст. ж., 1966, **12**, 1, 87—92.
5. H. G. Flynn. Physics of acoustics cavitation in liquids. Physical Acoustics (eg. W. Mason), 1964, N. Y., 18.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
18 апреля 1966 г.