УДК 534.24

О ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ПРОЗРАЧНОСТИ ДВУХСЛОЙНОЙ СИСТЕМЫ СО СЛУЧАЙНЫМ ПАРАМЕТРОМ

Т. Д. Кудрявцева

В статье [1] были даны выражения для математического ожидания и дисперсии случайной величины

$$\eta = \frac{D^4}{1-R^4}\left\{1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} R^{2m}\cos 2k_1 m(a+\xi)\right\} \tag{1}$$

— квадрата модуля коэффициента звукопрохождения для двухслойной системы с промежуточным слоем. Предполагалось, что толщина промежуточного слоя $a+\xi$ содержит случайную ошибку $\xi = N(0, \sigma)$, $a = \text{const}$; D, R — соответственно коэффициенты прохождения и отражения для крайнего слоя по энергии, k_1 — волновое число для промежуточного слоя. Оказывается возможным более полно охарактеризовать поведение случайной величины η, а именно — найти ее плотность распределения.

Плотность распределения периодической функции η от случайной величины ξ с заданным законом распределения может быть записана в форме, предложенной Левиным и Серовым [2]:

$$W(y) = \frac{D^4}{2\pi R^2 y^2\sqrt{1-\left(\alpha-\dfrac{\beta}{y}\right)^2}}\left\{1 + 2\sum_{m=1}^{\infty}\exp\left(-2k_1^2\sigma^2 m^2\right)\times\right.$$

$$\left.\times\cos\left[m\arccos\left(\alpha-\frac{\beta}{y}\right)\right]\cos 2k_1 ma\right\} =$$

$$= \frac{D^4}{2\pi R^2 y^2\sqrt{1-\left(\alpha-\dfrac{\beta}{y}\right)^2}}\left\{\theta_3(q, u_1)+\theta_3(q, u_2)\right\}, \tag{2}$$

где

$$\alpha = \frac{1+R^4}{2R^2},\quad \beta = \frac{D^4}{2R^2},\quad \frac{D^4}{(1+R^2)^2} < y < 1, \tag{3}$$

$$q = \exp(-2k_1^2\sigma^2),$$

$$u_{1,2} = \frac{1}{2}\arccos\left(\alpha-\frac{\beta}{y}\right) \mp k_1 a,$$

$\theta_3(q, u)$ — эллиптическая тэта-функция. Удобно представить $W(y)$ в виде

$$W(y) = \frac{D^4}{\pi R^2 y^2\sqrt{1-\left(\alpha-\dfrac{\beta}{y}\right)^2}}\left[1 + q\left(H(z_1)+H(z_2)\right)\right],$$

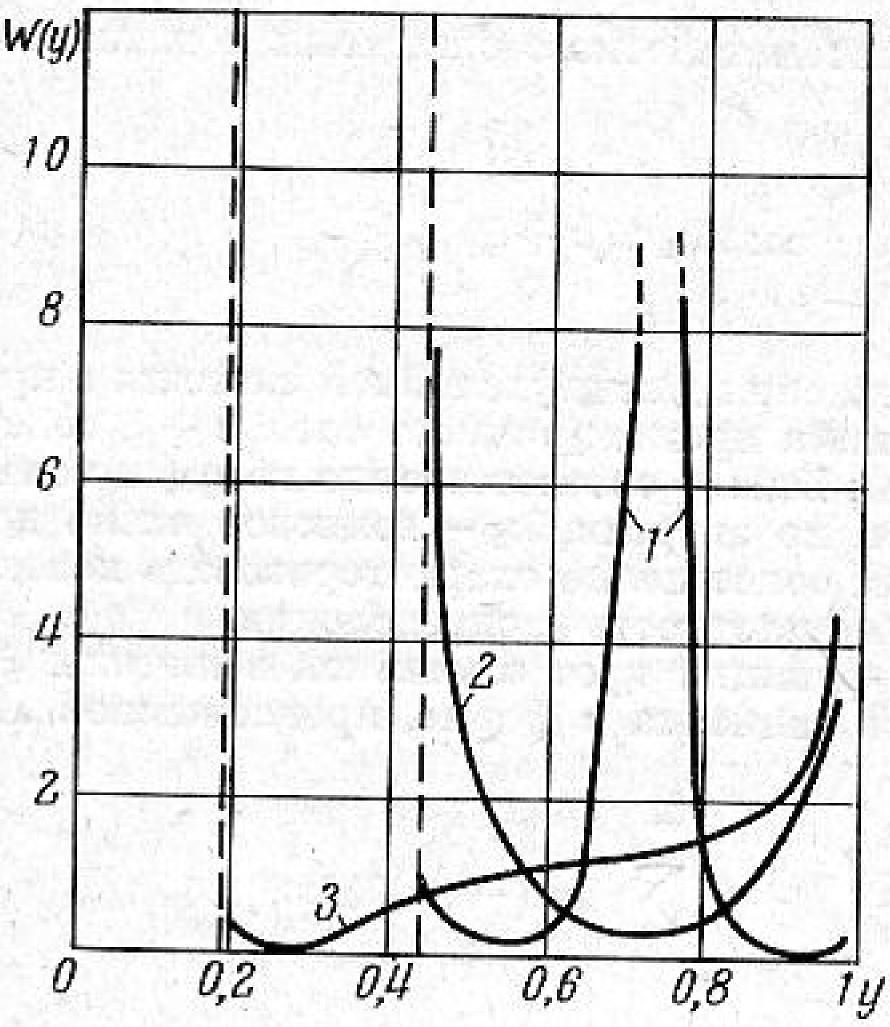
где $H(z)$ — табулированная [3] эллиптическая функция, $z_i = \cos 2u_i$, $i = 1, 2$.

Появление случайной ошибки в толщине промежуточного слоя приводит к уменьшению максимумов и увеличению минимумов среднего квадрата модуля коэффициента звукопрохождения системы; в выражении для $M\eta$ появляются экспоненциальные множители по сравнению с формулой для абсолютно точно изготовленного фильтра ((1) при $\xi = 0$):

$$M\eta = \frac{D^4}{1-R^4}\left\{1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} R^{2m}\exp(-2k_1^2\sigma^2 m^2)\cos 2k_1 ma\right\}. \tag{4}$$

Если дисперсия $D\eta$ мала, можно с достаточной точностью считать случайную величину η равной ее математическому ожиданию. Например, можно судить об уменьшении максимумов η по сравнению со случаем идеального фильтра ($\xi = 0$) по уменьшению максимумов $M\eta$. Если дисперсия не является достаточно малой, оказывается полезным знать не только среднее $M\eta$, но и то, насколько вероятно появление определенных отклонений от среднего. Зная плотность распределения (2), можно определить вероятность того, что случайная величина η при интересующем нас значении k_1a (в частности, в максимумах, т. е. при $k_1a = n\pi$, n — целое) лежит в некотором интервале значений (y_1, y_2).

Плотность распределения $W(y)$, как видно из (2), является антимодальной, т. е. имеет по крайней мере один минимум на интервале (3) и неограниченно возрастает при приближении к концам этого интервала. Если дисперсия $D\eta$ мала, то на интервале (3) существует максимум плотности, в окрестности которого лежит математическое ожидание. Например, при $R^2 = 0{,}2$; $\exp(-2k_1^2\sigma^2) = 0{,}992$; $k_1a = 10$ в окрестности точки $M\eta \cong 0{,}73$ расположен максимум плотности (см. фигуру, кривая *1*); $D\eta \sim 10^{-3}$. В этом случае вероятность попадания η в интервал (0,63; 0,83) практически равна единице.



При тех же R^2 и k_1a, но при $\exp(-2\,k_1^2\sigma^2) = 0{,}887$ дисперсия $D\eta \sim 10^{-2}$; соответствующий график плотности (кривая *2*) уже не имеет максимума внутри интервала (3). В случае $R^2 = 0{,}4$; $k_1a = \pi$; $\exp(-2k_1^2\sigma^2) = 0{,}82$ получаем $M\eta \cong 0{,}78$; вероятность попадания в интервал $M\eta \pm 0{,}1$ составляет всего 0,3, в то время как вероятность попадания в интервал (0,8; 1) равна 0,53, т. е. существенно больше (см. кривую *3*).

Вид функции (2) является типичным для плотности распределения периодической функции типа синуса от нормально распределенной случайной величины. Например, рассматривая квадрат модуля коэффициента звукоизоляции [4], мы получим для него функцию плотности вида, сходного с формулой (2):

$$W_1(y) = \frac{1}{G\pi\sqrt{1-\left(\dfrac{E^2+F^2-2y}{2G}\right)^2}}\left\{1 + 2\sum_{m=1}^{\infty}\exp(-2k_1^2\sigma^2m^2)\times\right.$$

$$\left.\times\cos\left[m\arccos\frac{E^2+F^2-2y}{2G}\right]\cos\left[m(2k_1a-\Phi)\right]\right\},$$

где G, E, F, Φ — функции волновой толщины крайнего слоя k_2d и отношения волновых сопротивлений крайнего и среднего слоя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Т. Д. Кудрявцева, Б. Д. Тартаковский. Влияние неточностей конструкции двухслойных систем на их фильтрующие свойства. Акуст. ж., 1965, 11, 2, 187—191.
2. Б. Р. Левин, В. Б. Серов. О распределении периодической функции случайной величины. Радиотехн. и электрон., 1964, 9, 6, 1065—1067.
3. Шулер и Гебелейн. Таблицы эллиптических функций. ВЦ АН СССР, М., 1961.
4. Т. Д. Кудрявцева, Б. Д. Тартаковский. Влияние неточностей конструкций двухслойных систем на их звукоизолирующие свойства. Акуст. ж., 1965, 11, 1, 62—67.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступило в редакцию
6 мая 1966 г.

УДК 534.231

УПРУГИЕ СВОЙСТВА ПОЛУЖЕСТКОГО ПОЛИУРЕТАНОВОГО ПЕНОПЛАСТА ПРИ МАЛЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

К. И. Мальцев

Нами были исследованы упругие свойства и потери полиуретановых пенопластов, полученных на основе смеси полиэфиров (рецептуры № 3 ВНИИСС и десмофена 2200) с диизоцианатом «смесь 65/35 ДУДЭГ». Материалы были разработаны и изготовлены во Владимирском научно-исследовательском институте синтетических смол