

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 534.26

АКУСТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ПУЛЬСИРУЮЩЕГО КОЛЬЦА НА ЦИЛИНДРЕ

В. К. Алексеев, Л. Ф. Лепендин

Рассмотрим дальнейшее акустическое поле пульсирующего кольца, расположенного на бесконечном акустически жестком цилиндре. Пусть на боковой поверхности цилиндра радиуса  $a$  расположен поршневой излучатель в форме кольца шириной  $2h$ , которое пульсирует со скоростью  $v_0 e^{-i\omega t}$ . В случае установившегося режима акустическое поле характеризуется функцией  $u = u(r; z)$ , которая в области  $a \leq r < \infty$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $-\infty < z < \infty$  должна удовлетворять амплитудному уравнению Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = 0. \tag{1}$$

Кроме того, на внешней поверхности цилиндра должно выполняться граничное условие:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=a} = \begin{cases} v_0 & \text{при } |z| \leq h, \\ 0 & \text{при } |z| > h, \end{cases} \tag{2}$$

а на бесконечности — условие излучения:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = 0. \tag{3}$$

Предполагается, что пульсирующее кольцо расположено симметрично относительно плоскости  $z = 0$  и заделано заподлицо с внешней поверхностью цилиндра.

Найдем решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2) и (3). Полагая

$$F = \int_{-\infty}^{\infty} u e^{izx} dz, \text{ приведем уравнение (1) к виду}$$

$$\Delta F + (k^2 - \tau^2) \cdot F = 0, \tag{4}$$

а граничное условие (2) — к виду

$$\left. \frac{\partial F}{\partial r} \right|_{r=a} = \frac{2v_0 \sin(h \cdot \tau)}{\tau}. \tag{5}$$

Решение уравнения (4), удовлетворяющее условию (5) и условию вида (3), есть функция

$$F = \frac{-2 \cdot v_0 \cdot \sin(h\tau) \cdot H_0(r \sqrt{k^2 - \tau^2})}{\tau \sqrt{k^2 - \tau^2} \cdot H_1(a \sqrt{k^2 - \tau^2})}. \tag{6}$$

Совершая обратное преобразование Фурье, найдем решение поставленной задачи в виде

$$u(r; z) = \frac{-v_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(h\tau) \cdot H_0(r \sqrt{k^2 - \tau^2})}{\tau \sqrt{k^2 - \tau^2} \cdot H_1(a \sqrt{k^2 - \tau^2})} e^{-izx} d\tau, \tag{7}$$

где  $H_0$  — первая функция Ханкеля нулевого порядка,  $H_1$  — первая функция Ханкеля первого порядка. Для дальнейшего поля вычисление интеграла (7) произведем методом седловых точек, предварительно преобразовав его к более удобному виду. Следуя работе [1], произведем замену переменной интегрирования по формуле



$\tau = k \sin s$ . Тогда комплексная переменная  $s = x + iy$  для различных участков пути интегрирования определится следующими соотношениями:

$$\left. \begin{array}{l} \text{для } -\infty < \tau \leq -k \quad s = -\frac{\pi}{2} + iy \quad \text{при } \infty > y \geq 0, \\ \text{для } -k \leq \tau \leq k \quad s = x \quad \text{при } -k \leq x \leq k, \\ \text{для } k \leq \tau < \infty \quad s = \frac{\pi}{2} + iy \quad \text{при } 0 \geq y > -\infty. \end{array} \right\}$$

Далее, обходя точку ветвления  $-\pi/2$  по четверти дуги окружности  $s = -\frac{\pi}{2} + \rho \cdot e^{i\psi}$  малого радиуса  $\rho$  при  $\frac{\pi}{2} \geq \psi \geq 0$ , а точку ветвления  $\pi/2$  — по четверти дуги окружности  $s = \frac{\pi}{2} - \rho \cdot e^{i\psi}$  малого радиуса  $\rho$  при  $\pi \leq \psi \leq 3\pi/2$ , вводя сферические координаты  $R$  и  $\theta$ , связанные с цилиндрическими координатами  $r$  и  $z$  формулами:  $r = R \cos \theta$ ,  $z = R \sin \theta$ , и полагая для больших значений  $R$

$$H_0(Rk \cdot \cos \theta \cdot \cos s) \approx \sqrt{\frac{2}{Rk \cos \theta \cos s}} e^{i \left( Rk \cos \theta \cdot \cos s - \frac{\pi}{4} \right)},$$

приведем выражение (7) к виду

$$u(R; \theta) \approx \frac{\sqrt{2} v_0 e^{-\frac{3\pi}{4}i}}{\pi \cdot k \sqrt{Rk\pi}} \int_c f(s) e^{Rk\gamma(s)} ds, \quad (8)$$

где  $\gamma(s) = i \cos(s + \theta)$ , а

$$f(s) = \frac{\sin(hk \sin s)}{\sin s H_1(ak \cos s) \sqrt{\cos \theta \cos s}}, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Согласно работе [2], решая уравнение  $\gamma'(s) = 0$ , найдем седловую точку:  $s = -\theta$ . Для определения направления наиболее крутого спуска, проходящего через седловую точку, разложим функцию  $\gamma(s)$  в ряд

$$\gamma(s) = i \left[ 1 - \frac{(s + \theta)^2}{2!} + \frac{(s + \theta)^4}{4!} - \dots \right].$$

Определяя окрестность седловой точки равенством  $s = -\theta + \rho e^{i\psi}$  для малых значений  $\rho$  и  $0 \leq \psi \leq 2\pi$ , мы можем написать

$$\gamma(\rho; \psi) \approx \frac{\rho^2}{2} \sin 2\psi + i \left( 1 - \frac{\rho^2}{2} \cos 2\psi \right);$$

остальные члены ряда отброшены в силу малости значения  $\rho$ . Из последнего соотношения следует, что вещественная часть функции  $\gamma(s)$  в окрестности седловой точки наиболее быстро изменяется, оставаясь отрицательной, в направлении  $\psi = -\pi/4$ .

Деформируя в выражении (8) путь интегрирования так, чтобы он проходил через седловую точку  $s = -\theta$  в направлении  $\psi = -\pi/4$  и ограничиваясь малым участком пути интегрирования в окрестности седловой точки, мы получим для значения интеграла (8) асимптотическое равенство

$$\int_c f(s) e^{Rk\gamma(s)} ds \sim \sqrt{\frac{2\pi}{-Rk\gamma''(s_0)}} f(s_0) e^{Rk\gamma(s_0)},$$

которое приведено в работе [2]. Учитывая, что  $s_0 = -\theta$ ,  $\gamma(s_0) = i$ ,  $\gamma''(s_0) = -i$ , после несложных преобразований мы получим приближенное значение амплитуды потенциала скоростей для дальнего акустического поля

$$u(R; \theta) \approx \frac{2v_0 \sin(hk \sin \theta)}{\pi k^2 R \cos \theta \sin \theta H_1(ak \cos \theta)} e^{i(Rk + \pi/2)}$$

где переменная  $\theta$  определена неравенством:  $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ .



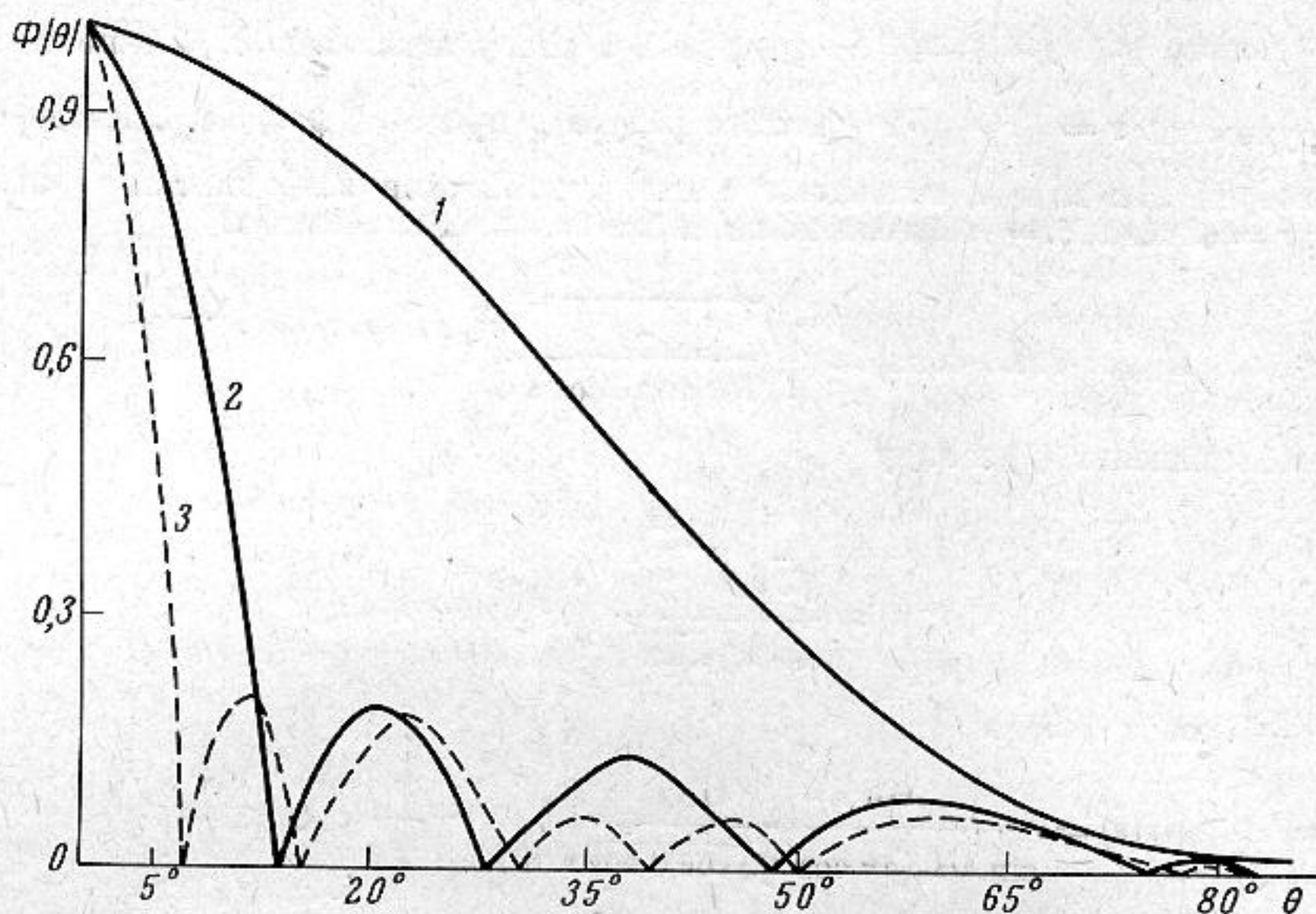
Учитывая, что

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} u(R; \theta) = \frac{2v_0 h}{\pi k R H_1'(ak)} e^{i(Rk + \pi/2)},$$

получим выражение амплитудной характеристики направленности:

$$\Phi(\theta) = \frac{|u(R; \theta)|}{|u(R; 0)|} = \frac{|\sin(hk \sin \theta) H_1'(ak)|}{hk |\cos \theta \sin \theta H_1'(ak \cos \theta)|} \quad (9)$$

На фигуре приведены графики, изображающие диаграммы направленности излучателя при  $ak = 24$  и  $hk = 3$  (1),  $hk = 12$  (2) и  $hk = 24$  (3), из которых следует, что увеличение параметра  $hk$  сопровождается возрастанием направленности излу-



теля и появлением добавочных максимумов. Расчеты, произведенные для других значений параметров, позволяют отметить, что диаграмма направленности мало изменяется с изменением параметра  $ak$ . Например, при  $ak = 12$ ,  $hk = 12$  диаграмма практически такая же, как и для  $ak = 24$ ,  $hk = 12$ .

В заключение отметим, что естественным обобщением рассмотренной задачи является задача о расчете внешнего акустического поля, создаваемого системой несинфазно пульсирующих колец, расположенных на акустически жестком бесконечном цилиндре.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Пистолкорс. Излучение из продольных щелей в круговом цилиндре. Ж. техн. физ., 1947, 17, 3, 369.
2. Д. Е. Вакман. Асимптотические методы в линейной радиотехнике. М., «Сов. радио», 1962, стр. 27.

Таганрогский радиотехнический институт

Поступило в редакцию  
27 ноября 1965 г.

УДК 534.87

#### О ЗАВИСИМОСТИ ВРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ ИМПУЛЬСНОГО СИГНАЛА В СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ ОТ ВЕРТИКАЛЬНОЙ КООРДИНАТЫ

В. А. Анапасенко

При фиксированном расстоянии между излучателем и приемником в слоисто-неоднородной среде может возникнуть необходимость в исследовании временной структуры импульсного излучения в зависимости от вертикальной координаты. В этом случае метод, изложенный в [1], следует дополнить построением диаграммы «время запаздывания — глубина приема» ( $\tau - z$ ).