УДК 534.283.2

О СООТНОШЕНИИ МЕЖДУ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО И ВРЕМЕННОГО ЗАТУХАНИЯ МОНОХРОМАТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ В ВОЛНОВОДЕ

С. А. Рыбак, Б. Д. Тартаковский

Монохроматическая волна в волноводе, ориентированном вдоль оси x, имеет вид $\Phi = \varphi(y, z)e^{i(\omega t - kx)}$, причем дисперсионное уравнение, связывающее частоту ω с волновым числом k, можно записать в форме

$$F(\omega, k, \lambda) = 0, \tag{1}$$

где λ — параметр, характеризующий упругие свойства волновода. В среде с поглощением λ комплексно: $\lambda = \lambda' - i\lambda''$; соответственно $k = k' - i\varkappa$, $\omega = \omega' + i\delta$. Пусть потери малы: $\lambda'' \ll \lambda'$. Предполагая k постоянным, можно получить из уравнения (1), придавая λ приращение $i\lambda''$, следующее выражение:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \omega}\right)_{k'} = +\frac{1}{\delta}\frac{\partial F}{\partial \lambda}\lambda''. \tag{2}$$

Если зафиксировать в (1) величину ω, то получим

$$\left(\frac{\partial F}{\partial k}\right)_{\omega'} = -\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial F}{\partial \lambda}\lambda''. \tag{3}$$

Физически первый случай соответствует затуханию во времени по закону $\sim e^{-\delta t}$ волны, имеющей пространственное распределение $\sim e^{-ik'x}$. Второй случай можно реализовать, поместив в некоторую точку волновода монохроматический источник с частотой ω; его поле будет затухать с расстоянием по закону $\sim e^{-\varkappa x}$.

С другой стороны, предполагая $\lambda = \mathrm{const}$, из условия $dF(\omega, k) = 0$ (при $\lambda = \mathrm{const}$) получим

$$\frac{\partial F / \partial k}{\partial F / \partial \omega} = -\frac{\partial \omega}{\partial k}. \tag{4}$$

Из (2), (3) и (4) находим соотношение между коэффициентом временного затухания δ и коэффициентом пространственного затухания $\varkappa$

$$\frac{\delta}{\varkappa} = \frac{\partial \omega}{\partial k}. \tag{5}$$

Производная $\partial\omega / \partial k$ — как известно, групповая скорость, равная для волновода без потерь скорости переноса энергии. Для волновода с потерями скорость переноса энергии отлична от $\partial\omega / \partial k$, однако это отличие при малых потерях несущественно. Соотношение (5) может оказаться полезным при анализе распространения сигналов в волноводах (и, вообще говоря, в структурах) с поглощением. Например, для одномерной цепочки связанных осцилляторов дисперсионное уравнение (1) имеет, как известно, вид

$$\omega = \frac{2c_\infty}{d}\left|\sin\frac{kd}{2}\right|, \quad -\frac{\pi}{2} < \frac{kd}{2} < \frac{\pi}{2},$$

где $c_\infty = d\sqrt{B / md}$, B — жесткость упругого элемента, m — масса инерциального элемента осциллятора, d — расстояние между осцилляторами. Для этого случая $\delta / \varkappa = c_\infty \cos(kd / 2)$, где временнóе затухание $\delta = c'' / c'$ $(c_\infty = c' + ic'')$.

Видно, что если $kd / 2 \to \pi / 2$, то коэффициент пространственного затухания $\varkappa$ стремится к бесконечности при любом конечном временнóм коэффициенте потерь δ.

Таким образом, используя соотношение (5), можно определить пространственное затухание в волноводе, если известны дисперсия групповой скорости и временнóе затухание. Наоборот, найдя (например, экспериментально) частотную характеристику пространственного затухания, можно определить дисперсию групповой и затем фазовой скорости. Практическая значимость найденного соотношения заключается еще и в том, что оно позволяет сопоставить полученные экспериментально независимым путем различные характеристики волновода: временнóе затухание $\delta(\omega)$, пространственное затухание $\varkappa(\omega)$ и групповую скорость $c_{\text{гр}}(\omega)$. Для этого формулу (5) удобно переписать так: $(\varkappa(\omega) / \delta(\omega))c_{\text{гр}} = 1$, что и будет критерием достоверности полученных экспериментальных результатов.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступило в редакцию
23 мая 1965 г.