УДК 534.231.1-16

# О ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛНАХ В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ

*Л. М. Бреховских*

Вдоль плоской границы однородного твердого тела может распространяться хорошо известная поверхностная волна Рэлея. Выпуклая граница может удерживать поверхностные волны, отличные от рэлеевской. Такие же волны существуют при плоской границе, когда скорость упругих волн возрастает при удалении от границы*. Среди этих волн существуют волны нового типа, в которых сдвиговая часть удерживается кривизной границы, а продольная часть имеет тот же характер, что и в случае поверхностной рэлеевской волны.

Рассмотрим волны в твердом цилиндре радиуса $R$, ограничиваясь плоской задачей, когда волновые функции не зависят от координаты $y$, направленной вдоль оси цилиндра. Будем рассматривать волны гармонические во времени и фактор $\exp(i\omega t)$ всюду будем опускать.

Случай 1. Смещение $\mathbf{u}$ параллельно оси цилиндра ($u_y \equiv u$). Рассмотрим сперва случай однородного цилиндра. Тогда для $u$ справедливо волновое уравнение $\Delta u + \varkappa^2 u = 0$, $\varkappa = \omega / b$, ($b$ — скорость сдвиговых волн) с граничным условием $r = R$, $\partial u / \partial r = 0$ [1]. Будем искать $u$ в виде $u = r^{-1/2}\hat{u}(r)\Phi(\vartheta)$, где $r$ и $\vartheta$ — полярные координаты в плоскости, нормальной $k$ оси. Разделяя переменные в волновом уравнении обычным способом, находим

$$\hat{u}'' + (\varkappa^2 - n^2 / r^2)\hat{u} = 0, \quad \hat{u}(R) = 2Ru'(R), \quad \Phi = e^{\pm in\vartheta}. \tag{1}$$

Мы будем ограничиваться достаточно высокими частотами, когда величина $\delta = 2(\varkappa R)^{-1}$ мала. Кроме того, имея в виду рассмотрение поверхностных волн, проникающих от поверхности на глубину $z \ll R$, мы заменим $r = R - z$ и в уравнении (1) пренебрежем величинами $(z / R)^N$, $N > 1$. Тогда

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2\hat{u}}{dz^2} + (\varkappa_1^2 - azp^2)\,\hat{u} = 0, \quad \varkappa_1^2 \equiv \varkappa^2 - p^2, \quad p \equiv n/R, \quad a \equiv 2/R, \\ &\left(\hat{u} + 2R\,\frac{d\hat{u}}{dz}\right)_{z=0} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Величина $n$ в формуле (1) при наших предположениях велика и отвлекаясь от условий периодичности по $\vartheta$, ее (а значит и $p$) можно считать изменяющейся непрерывно**. Вместо угла $\vartheta$ мы введем координату $x = R\vartheta$, отсчитываемую вдоль поверхности цилиндра. Тогда $\Phi = \exp(\pm ipx)$ и следовательно, $p$ — волновое число поверхностной волны, через которое ее фазовая скорость выражается как $v_\phi = \omega / p$. Решение уравнения (2), имеющее характер поверхностной волны, дается функцией Эйри [2, 3]:

$$\hat{u} = v(q), \quad q = (\xi\delta^2)^{-1/3}(1 - \xi + az), \quad \xi \equiv \left(\frac{\varkappa}{p}\right)^2 \equiv \left(\frac{v}{b}\right)^2, \quad \delta = \frac{a}{\varkappa}, \tag{3}$$

Функция $v(q)$ при отрицательных $q$ осциллирует с периодом и амплитудой, медленно убывающими с увеличением $|q|$. При положительных $q$ она убывает монотонно, подчиняясь при $q \gg 1$ закону

$$v(q) = \frac{1}{2}\,q^{-1/4}e^{-w}\left(1 - \frac{5}{72w}\right), \qquad w = \frac{2}{3}\,q^{3/2}. \tag{4}$$

Подстановка выражений (3) в граничное условие (2) при $z = 0$ дает уравнение для $\xi$:

$$v'(q_0) = -\frac{1}{4}(\xi\delta^2)^{1/3}v(q_0), \qquad q_0 \equiv q_{z=0} = (\xi\delta^2)^{-1/3}(1 - \xi). \tag{5}$$

Штрих означает производную по $q$. В тех случаях, когда корень последнего уравнения нужно знать с неслишком большой точностью, можно, учитывая малость $\delta^{2/3}$, заменить уравнение (5) уравнением $v'(q_0) = 0$, корни которого будут $q_{0l}$: $q_{01} = -1{,}02$, $q_{02} = -3{,}25$, ... Теперь из формул (5) находим, учитывая близость $\xi_l$ к единице

$$\xi_l \approx 1 - q_{0l}\delta^{2/3}. \tag{6}$$

---

* Мы исключаем из рассмотрения поверхностные волны, обусловленные наличием внутренних отражающих границ.

** Это будет, в частности, соответствовать действительности, если поверхностная волна достаточно затухает при обходе цилиндра.

Поскольку $\xi_l > 1$, скорость поверхностной волны несколько больше скорости сдвиговых волн. Последняя формула определяет также и дисперсию волны. Для групповой скорости мы имеем выражение:

$$\frac{v_{\text{гр}}}{b} = \frac{1}{b}\left(\frac{dp_l}{d\omega}\right)^{-1} \approx 1 - \frac{q_{0l}}{6}\delta^{2/3} = 1 + \frac{|q_{0l}|}{6}\left(\frac{ab}{\omega}\right)^{2/3}. \tag{7}$$

С возрастанием частоты скорость уменьшается и стремится к $b$.

Волновой процесс в основном ограничен слоем $q_{0l} < q < 0$, толщина которого $\Delta q = -q_{0l}$. В пространстве $z$ толщина слоя $\Delta z$, заполняемого волной, будет

$$\Delta z = \frac{1}{a}(\xi\delta^2)^{1/3}\Delta q \approx \frac{|q_{0l}|}{\varkappa}\left(\frac{\varkappa}{a}\right)^{1/3}. \tag{8}$$

Случай 2. Смещение $\mathbf{u}$ лежит в плоскости $r\vartheta$. Оно может быть выражено обычным образом через скалярный $\varphi$ и векторный $\psi\{0, 0, \psi\}$ потенциалы. Для последних в случае однородной среды мы имеем волновые уравнения:

$$\Delta\varphi + k^2\varphi = 0, \qquad \Delta\psi + \varkappa^2\psi = 0, \quad k = \omega / c, \tag{9}$$

где $c$ — скорость продольных волн. Аналогично первому случаю, будем искать решения этих уравнений в виде

$$\varphi = r^{-1/2}\hat{\varphi}(r)e^{\pm ipx}, \qquad \psi = r^{-1/2}\hat{\psi}(r)e^{\pm ipx}. \tag{10}$$

Переход затем к переменной $z = R - r$, разложение по степеням $z/R$ с удержанием членов не выше первой степени, дает снова уравнение второго порядка (2) для $\hat{\psi}$ с заменой $\hat{u} \to \hat{\psi}$. Для $\hat{\varphi}$ мы также получаем уравнение, совпадающее с (2), если заменить $u \to \hat{\varphi}$, $\varkappa_1^2 \to k_1^2 = k^2 - p^2$. Отсюда следует, что $\hat{\varphi}$ и $\hat{\psi}$ также даются функциями Эйри:

$$\hat{\varphi} = Av(t), \qquad \hat{\psi} = Bv(q), \tag{11}$$

где $q$ определяется выражением (3), а

$$t = (\xi\delta^2)^{-1/3}(1 - \xi d + az), \qquad d \equiv \frac{k^2}{\varkappa^2} = \left(\frac{b}{c}\right)^2 < 1; \tag{12}$$

$A$ и $B$ — постоянные. На границе $r = R$, $\hat{\varphi}$ и $\hat{\psi}$ связаны условиями, требующими исчезновения компонент $\widehat{rr}$ и $r\vartheta$ тензора напряжений. Как можно показать, это приводит к характеристическому уравнению для $\xi$:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\xi\right)^2 v(t_0)v(q_0) = (\xi\delta^2)^{1/3}v'(t_0)v'(q_0), \quad t_0 = (\xi\delta^2)^{-1/3}(1 - \xi d), \tag{13}$$

где $q_0$ определяется формулой (5).

Предположим, что $\xi$ меньше единицы и не слишком близко к ней. Тогда, в силу малости $\delta$, $t_0 \gg 1$, $q_0 \gg 1$. Воспользовавшись асимптотическим представлением (4) для $v(t_0)$ и $v(q_0)$, уравнение (13) можно написать в форме

$$\sqrt{(1-\xi)(1-\xi d)} = \left(1 - \frac{1}{2}\xi\right)^2\left\{1 - \frac{1}{4}\xi^{1/2}\delta\left[\frac{1}{(1-\xi)^{3/2}} + \frac{1}{(1-\xi d)^{3/2}}\right]\right\}. \tag{14}$$

При $\delta \to 0$ это уравнение совпадает с уравнением для скорости волны Рэлея для плоской границы (см. например, [3] § 4). Таким образом, в этом случае мы не получаем ничего нового, кроме поправки к скорости волны Рэлея на кривизну границы.

Предположим теперь, что $\xi$ больше единицы, причем $\xi - 1$ мало, так, что $q_0$ не велико. При этом $t_0$ будет по-прежнему большим, как и в случае волны Рэлея. Использовав асимптотику для функции $v(t_0)$, получаем из формулы (13)

$$v(q_0) = (\xi\delta^2)^{1/6}(1 - \xi d)^{1/2}\left(1 - \frac{1}{2}\xi\right)^{-2}v'(q_0). \tag{15}$$

Если, вследствие малости $\delta$, считать правую часть нулем, то мы получаем $v(q_0) = 0$, $q_0 = q_{0l}$, $q_{01} = -2{,}34$; $q_{02} = -4{,}10$ и т. д. Формулы (6) — (8) снова остаются в силе, но только с другими $q_{0l}$. Таким образом, здесь мы имеем волну с фазовой скоростью, несколько большей скорости сдвиговых волн и состоящую из двух компонент:

а) сдвиговая компонента. Она удерживается кривизной границы и имеет глубину проникновения (8);

б) продольная компонента такого же типа, что и в случае рэлеевской волны. Она имеет экспоненциально убывающую при увеличении $z$ амплитуду и глубину проникновения порядка $1/\varkappa$.

Уравнение (13) имеет также корни при $\xi d - 1 > 0$. Однако они не соответствуют каким-либо поверхностным волнам, поскольку их глубины проникновения имеют порядок $R$, т. е. волны расплываются на весь объем цилиндра.

Рассмотрим случай неоднородного тела, предположив, что

$$\varkappa^2(z) = \varkappa_0^2(1 - g_1 z), \qquad k^2 = k_0^2(1 - g_2 z), \tag{16}$$

где $g_1$ и $g_2$ — постоянные, малые величины. В этих условиях уравнения для продольных и поперечных волн будут не связаны друг с другом, и каждое из них будет типа (2). Их решения снова будут функциями Эйри, но с несколько другим определением $t$ и $q$.

В конечном счете, в случае 1 результаты остаются те же самые, но под $\delta$ теперь нужно понимать $\delta_1 = (a + g_1)/\varkappa_0$. Таким образом, действие кривизны границы аналогично действию неоднородности среды, что уже давно замечено в теории распространения радиоволн [4]. В случае 2, когда $\xi > 1$ и мы имеем волны нового типа, все результаты, включая и уравнение (15), также остаются неизменными, но снова с заменой $\delta$ на $\delta_1$. Мы видим, что при этом величина $g_2$, как и в случае 1, не играет никакой роли. Для случая 2 при $\xi < 1$ получаем уравнение, аналогичное (14), позволяющее определить поправку к скорости волн Рэлея на кривизну и на неоднородность среды:

$$\sqrt{(1-\xi)(1-\xi d)} = \left(1 - \frac{1}{2}\xi\right)^2 \left\{1 - \frac{1}{4}\xi^{1/2}\left[\frac{\delta_1}{(1-\xi)^{3/2}} + \frac{\delta_2}{(1-\xi d)^{3/2}}\right]\right\}, \tag{17}$$

где $\delta_2 = (a + g_2)/\varkappa_0$. Интересно отметить, что поскольку $\xi$ сравнительно близко к 1, первый член в квадратной скобке превалирует, а следовательно, величина $g_2$ снова оказывается мало существенной.

В случае 2, при $\xi d - 1 = \varepsilon$, $\varepsilon$ — мало, мы получаем поверхностную волну со скоростью, близкой к скорости продольных волн (но несколько большей ее) и с глубиной проникновения $\Delta z \approx (1 - d)/(a + g_1)d$.

В заключение отметим, что в сферическом случае все изложенные выше конечные результаты остаются неизменными, причем $R$ будет радиусом сферы.

## ЛИТЕРАТУРА


1. А. Ляв. Математическая теория упругости. М., ОНТИ, 1935, стр. 300.
2. В. А. Фок. Таблицы функций Эйри. М., ГТТИ, 1946.
3. Л. М. Бреховских. Волны в слоистых средах. М., Изд-во АН СССР, § 8, 38, 1957.
4. Я. Л. Альперт, В. Л. Гинзбург, Е. Л. Фейнберг. Распространение радиоволн. М., ГИТТЛ, 1953, стр. 257.



Акустический институт АН СССР
Москва



Поступило в редакцию
18 апреля 1966


---


УДК 524.23:532.594


# О ГЕНЕРАЦИИ ЗВУКОВЫХ ВОЛН В ЖИДКОСТИ ПОВЕРХНОСТНЫМИ * ВОЛНАМИ


*Л. М. Бреховских*


1. Гравитационные и капиллярные волны на поверхности жидкости являются решениями линеаризированных уравнений гидродинамики несжимаемой жидкости. Возмущения, вызванные этими волнами, проникают вглубь жидкости на расстояния всего лишь порядка длины волны. Учитывая члены второго порядка в уравнениях гидродинамики, можно описать эффект взаимодействия поверхностных волн между собой [1—3]. Оказалось, что две встречные волны одинаковой частоты, образующие на поверхности стоячую волну, дают пульсации давления, не убывающие с глубиной. При учете сжимаемости жидкости такие пульсации вызывают уходящую от поверхности звуковую волну. Хотя звуковая волна и является результатом нелиней-

* Подробное изложение работы см. в Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана 1966, № 9.