АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XI 1965 Вып. 1

УДК 534.231/.87

О ШУМОВОМ ПОЛЕ ВНУТРИ СФЕРЫ КОНЕЧНОГО РАДИУСА, СОЗДАВАЕМОМ СЛОЕМ ПРОСТЫХ ИСТОЧНИКОВ, РАСПОЛОЖЕННЫХ НА ЕЕ ПОВЕРХНОСТИ

А. М. Резник

Рассмотрен вид функции пространственной корреляции и распределение интенсивности шума внутри сферы конечного радиуса, создаваемого слоем коррелированных простых источников, расположенных на ее поверхности. Анализ выполнен для случая, когда граница сферы не искажает поля и функция пространственной корреляции источников описывается колоколообразным законом.

Знание статистических свойств шума внутри замкнутого объема при случайном возбуждении его границ оказывается необходимым в целом ряде практических задач. В настоящее время этот вопрос исследован лишь для модели, состоящей из дискретных некоррелированных источников, расположенных на поверхности сферы конечного радиуса [1]. Известно, однако, что рассмотренная в работе [1] модель является недостаточно корректным отображением реальной ситуации, когда источники шума коррелированы и заполняют границы непрерывно.

В данной работе предпринята попытка описать шумовое поле внутри сферы конечного радиуса, возбуждаемое слоем простых коррелированных источников, расположенных на ее поверхности, когда внутри сферы отсутствует заметное поглощение звука и граница сферы не искажает поля. При этом предполагается, что функция пространственной корреляции возбуждения имеет вид

$$\Psi(\mathbf{r}_{0i}, \mathbf{r}_{0j}) = c \exp[-(\mathbf{r}_{0i} - \mathbf{r}_{0j})^2 / 2b^2], \qquad (1)$$

что обычно имеет место при обтекании тел турбулентным потоком [2].

Для описания шумового поля достаточно определить функцию пространственной корреляции для произвольной пары точек внутри сферы

$$\Psi(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = \mathrm{Re}\, \overline{p(\mathbf{r}_i) p^*(\mathbf{r}_j)},$$

где $p(\mathbf{r}_i)$, $p(\mathbf{r}_j)$ — звуковые давления в i-й и j-й точках соответственно. Черта сверху обозначает усреднение по ансамблю, звездочкой отмечена комплексно-сопряженная величина.

Функцию пространственной корреляции шума внутри сферы будем искать в виде преобразования

$$\Psi(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = \mathrm{Re} \int\int \Psi(\mathbf{r}_{0i}, \mathbf{r}_{0j}) G(\mathbf{r}_i/\mathbf{r}_{0i})\, G^*(\mathbf{r}_j/\mathbf{r}_{0j})\, d\mathbf{r}_{0i} d\mathbf{r}_{0j}, \qquad (2)$$

где $\Psi(\mathbf{r}_{0i}, \mathbf{r}_{0j})$ — функция пространственной корреляции источников шума, $G(\mathbf{r}/\mathbf{r}_0)$ — функция Грина для внутренней области сферы. Для учета временной структуры шума положим, что возбуждение сферы ста-

ционарно и имеет место преобразование

$$\Psi_\omega(\mathbf{r}_{0i},\ \mathbf{r}_{0j}) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\mathbf{r}_{0i},\ \mathbf{r}_{0j},\ \tau)\exp(i\omega\tau)\,d\tau.$$

Будем полагать, что функция корреляции для ω-компоненты процесса описывается выражением (1). При этом величина c в формуле (1) обозначает спектральную плотность возбуждения и b-радиус корреляции шума для соответствующей частоты.

Функция Грина для внутренней области сферы при условии, что граница не искажает поля [3, стр. 434] имеет вид

$$G_\omega(\mathbf{r}/\mathbf{r}_0) = ik\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\sum_{m=0}^{n}\varepsilon_m\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\exp[im(\varphi-\varphi_0)]\times$$

$$\times P_n{}^m(\cos\theta_0)P_n{}^m(\cos\theta)j_n(kr)h_n(kr_0), \qquad (3)$$

$$\varepsilon_m = \begin{cases} 1, & m=0, \\ 2, & m>0, \end{cases}$$

где k — волновое число, $j_n(kr)$, $h_n(kr)$ — сферические функции Бесселя и Ганкеля соответственно. Представляя аргумент (1) в виде

$$(\mathbf{r}_{0i}-\mathbf{r}_{0j})^2/2b^2 = \frac{r_0{}^2}{b^2}[1-\cos\theta_i\cos\theta_j-\sin\theta_i\sin\theta_j\cos(\varphi_i-\varphi_j)]$$

и используя соотношение

$$\int_0^{\pi}\exp(iz\cos\theta\cos u)J_m(z\sin\theta\sin u)P_n{}^m(\cos u)\sin u\,du =$$

$$= 2i^{n-m}P_n{}^m(\cos\theta)j_n(z),$$

получим

$$\Psi(\mathbf{r}_i\ \mathbf{r}_j) = c(\pi/2)^{1/2}br_0k^2\exp(-r_0{}^2/b^2)\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)I_{n+1/2}(r_0{}^2/b^2)\times$$

$$\times|h_n(kr_0)|^2 j_n(kr_i)j_n(kr_j)P_n[\cos\theta_i\cos\theta_j+\sin\theta_i\sin\theta_j\cos(\varphi_i-\varphi_j)]. \qquad (4)$$

Это выражение является основным в данной работе.

Перейдем к рассмотрению распределения интенсивности шума внутри сферы. В силу симметрии, достаточно изучить распределение интенсивности вдоль радиуса сферы. Полагая $\theta_i=\theta_j=0$ и $r_i=r_j=r$, имеем

$$\Psi_0(r) = c(\pi/2)^{1/2}br_0k^2\exp(-r_0{}^2/b^2)\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)I_{n+1/2}(r_0{}^2/b^2)\times$$

$$\times|h_n(kr_0)|^2 j_n{}^2(kr). \qquad (5)$$

Сначала определим интенсивность шума в центре сферы. Полагая $kr=0$ и подставляя соответственные выражения для $I_{1/2}(r_0{}^2/b^2)$ и $h_0(kr_0)$, получаем

$$\Psi_0(0) - c(b^2/2r_0{}^2)[1-\exp(-2r_0{}^2/b^2)].$$

Можно отметить, что интенсивность шума в центре сферы при сильно коррелированном возбуждении $(r_0/b<1)$ равна интенсивности возбуждения поверхности сферы. При слабо коррелированном возбуждении увеличение радиуса корреляции возбуждения приводит к росту интенсивности шума в центре сферы.

Для выяснения влияния интервала корреляции источников на распределение интенсивности шума внутри сферы рассмотрим частные случаи.

Сильно коррелированное возбуждение $(r_0^2 / b^2 \ll 1)$. Используя выражение

$$I_{n+1/2}(x) \underset{x\to 0}{=} (x/2)^{n+1/2}/\Gamma(n+3/2),$$

замечаем, что члены ряда быстро убывают с ростом n, так что достаточно удержать лишь первое слагаемое суммы (5)

$$\Psi_0(r) = ck^2 r_0^2 |h_0(kr_0)|^2 j_0^2(kr).$$

Если шум низкочастотный, т. е. $(kr_0 \ll 1)$, то

$$h_n(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n+1)}{x^{n+1}},$$

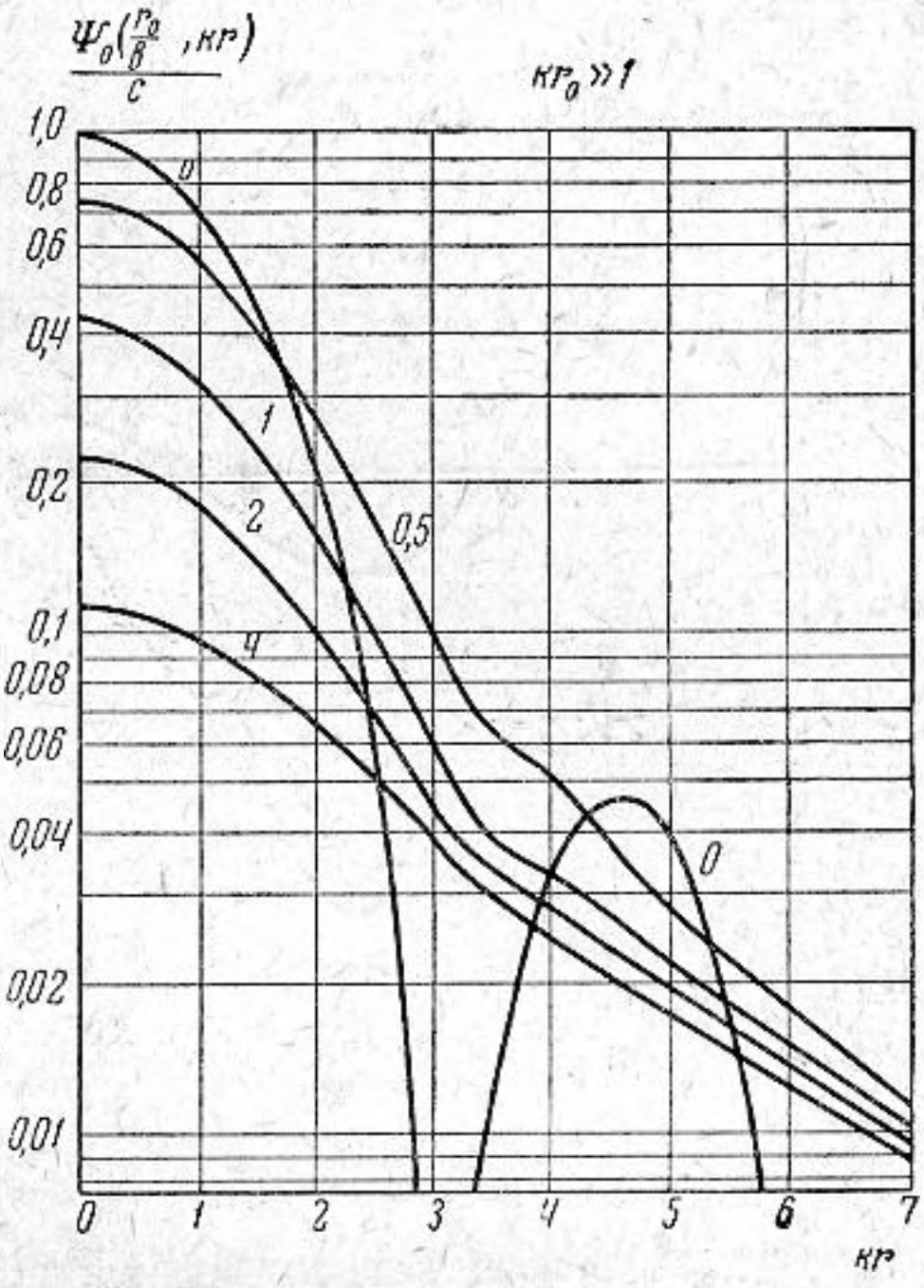
$$j_n(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^n}{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n+1)},$$

$$\Psi_0(r) = c.$$

Как видно, интенсивность шума внутри сферы распределена равномерно.

В случае высокочастотного шума $(kr_0 \gg 1)$ мы имеем

$$|h_n(x)| \underset{x\to\infty}{=} \frac{1}{x} \text{ и } \Psi_0(r) = cj_0^2(kr).$$



Фиг. 1

Легко видеть, что интенсивность шума максимальна в центре сферы и спадает к периферии. Внутри сферы наблюдаются чередующиеся узлы и пучности интенсивности шума. При увеличении отношения r_0 / b, как видно из фиг. 1 (цифры у кривых дают соответственные значения параметра r_0^2 / b^2), происходит некоторое сглаживание кривой и уменьшение интенсивности шума в центре сферы.

Слабо коррелированное возбуждение $(r_0^2 / b^2 \gg 1)$. Асимптотическая форма для функции Бесселя имеет вид

$$I_{n+1/2}(x) \underset{x\to\infty}{=} \exp x / \sqrt{2\pi x},$$

при этом

$$\Psi_0(r) = c\, 2\pi k^2 r_0^2 b^2 \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) |h_n(kr_0)|^2 j_n^2(kr).$$

Для низких частот $(kr_0 \ll 1)$ мы имеем

$$\Psi_0(r) = cb^2 r_0^{-2} 2^{-1} [1 + (r/r_0)^2] / [1 - (r/r_0)^2].$$

Как видно, интенсивность шума резко возрастает у границы сферической области и имеет минимум в центре сферы.

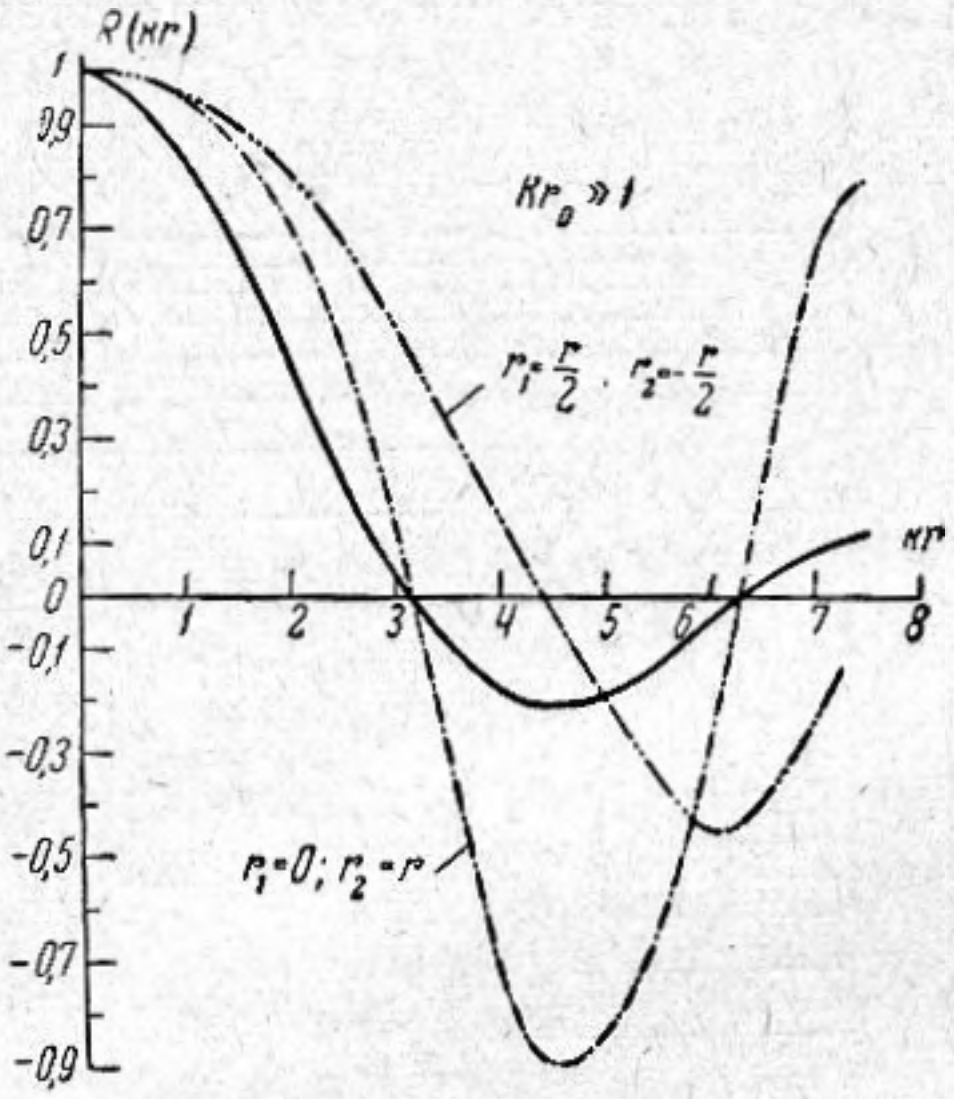
При высокочастотном шуме распределение интенсивности описывается в данном случае следующим образом:

$$\Psi_0(r) = cb^2 r_0^{-2} 2^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) j_n^2(kr) = cb^2/2r_0^2.$$

Здесь использовано соотношение [4, стр. 944]

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)J^2_{n+1/2}(x)=x/2\Gamma(3/2).$$

Как видно, в этом случае интенсивность шума распределена внутри сферы равномерно. Следует, однако, отметить, что использованное нами разложение не является достаточно точным при r, близком к r_0, когда должно проявляться локальное влияние отдельных источников шума, как и в случае низких частот.



Фиг. 2

Перейдем к рассмотрению функций пространственной корреляции. При этом остановимся на двух случаях расположения звукоприемников: а) один из приемников расположен в центре сферы, а второй перемещается вдоль радиуса; б) оба приемника расположены симметрично относительно центра сферы.

При исследовании функций пространственной корреляции приходится считаться с установленной выше неоднородностью шумового поля внутри сферы. Поэтому удобно рассматривать нормированную функцию корреляции шума.

$$R(\mathbf{r}_i,\mathbf{r}_j)=\Psi(\mathbf{r}_i,r_j)\,/\sqrt{\Psi_0(\mathbf{r}_i)\,\Psi_0(\mathbf{r}_j)}.$$

В случае асимметричного расположения приемников подстановка значений Ψ из формулы (4) приводит к выражению

$$R(0,r)=\frac{|h_0(kr_0)|\,j_0(kr)\sqrt{I_{1/2}(r_0^2/b^2)}}{\sqrt{\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)I_{n+1/2}(r_0^2/b^2)\,|h_n(kr_0)|^2 f_n^2(kr)}}$$

Во втором случае, при симметричном относительно центра сферы расположении приемников, получим

$$R(r/2,-r/2)=\frac{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)I_{n+1/2}(r_0^2/b^2)\,|h_n(kr_0|^2 j_n^2(kr)}{\sum_{n=0}(2n+1)I_{n+1/2}(r_0^2/b^2)\,|h_n(kr_0)|^2 j_n^2(kr)}$$

Как и при анализе распределения интенсивности шума, рассмотрим частные случаи.

Коррелированное возбуждение шума ($r_0^2/b^2\ll 1$). При этом члены ряда быстро убывают и, ограничиваясь первым членом разложения, мы получаем $R(0,r)=R(r/2,-r/2)=1$, т. е. шум внутри сферы полностью коррелирован. Результаты расчета при $r_0^2/b^2=1$ и

$kr_0 \gg 1$ приведены на фиг. 2. Как видно, расположение звукоприемников сильно влияет на вид функции корреляции шума. Жирной линией на фигуре показана функция корреляции для изотропного шумового поля.

Слабо коррелированное возбуждение ($r_0^2 / b^2 \gg 1$). В этом случае вид функции корреляции сильно зависит от величины kr_0. Для низких частот ($kr_0 \ll 1$), используя те же преобразования, что и при вычислении интенсивности шума, получим

$$R(0, r) = \frac{1 - (r/r_0)^2}{\sqrt{1 + (r/r_0)^2}},$$

$$R(r/2, -r/2) = \frac{[1 - (r/2r_0)^2]^3}{[1 + (r/2r_0)^2]^3}$$

Как видим, функция корреляции обращается в нуль при приближении одного или обоих приемников к границе сферы. Наконец, в случае высокочастотного шума, используя теорему сложения для функций Бесселя [4, стр. 933], получим

$$R(0, r) = R(r/2, -r/2) = j_0(kr) = \sin kr / kr,$$

что совпадает с видом функции пространственной корреляции для изотропного шумового поля. Последнее, вместе с полученным выше результатом о независимости интенсивности шума от положения точки наблюдения внутри сферы при некоррелированном высокочастотном возбуждении, оправдывает часто используемую модель изотропного шумового поля, как результата действия совокупности некоррелированных точечных источников шума, плотно заполняющих поверхность сферы большого радиуса.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Клячкин. К вопросу о воздействии на приемную систему совокупности независимых шумовых источников, расположенных на поверхности сферы конечного радиуса. Акуст. ж., 1958, 4, 2, стр. 153—160.
2. Дж. Бэтчелор. Теория однородной турбулентности. М., ИЛ, 1960.
3. Ф. Морс и Г. Фешбах. Методы теоретической физики, т. II, М., ИЛ, 1960.
4. И. С. Градштейн и И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.

Киев

Поступила в редакцию
20 января 1964 г.