АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том X 1964 Вып. 1

УДК 534.211—16

# ВОЗБУЖДЕНИЕ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН В ПЛАСТИНАХ МЕТОДОМ НАКЛОННО ПАДАЮЩЕГО ЗВУКОВОГО ПУЧКА

*Д. Б. Дианов, К. В. Жарков*

Произведен расчет волнового поля, образующегося в пластине при падении на нее звукового пучка, созданного поршневым излучателем. Получены асимптотические формулы, определяющие направленность нормальных волн и зависимость их амплитуды от угла наклона излучателя. Результаты расчетов подтверждены экспериментально.

Большой интерес, проявляемый в последнее время, особенно в дефектоскопии, к нормальным волнам в пластинах и оболочках, порождает ряд задач, связанных с их возбуждением, распространением и приемом. Относящаяся сюда задача возбуждения нормальных волн в двумерном приближении проанализирована в обстоятельной работе Шоха [1]. В связи с практическими потребностями представляет интерес рассмотрение этой задачи также и в трехмерном случае, а именно, когда поле нормальных волн возбуждается звуковым пучком, создаваемым круглым поршневым излучателем. Этому вопросу и посвящена настоящая работа.

Расчет поля, создаваемого в пластине, мы будем строить, используя представление поля источника в виде суперпозиции плоских волн [1].

Пусть падающий из жидкости под углом $\beta$ на твердую пластину волновой пучок создается поршневым излучателем радиуса $a$ (фиг. 1). Представим поле этого пучка в интегральной форме. Для этого допустим, что в плоскости излучателя ($z = 0$) нормальная составляющая скорости задается в виде:

$$v_z|_{z=0} = \begin{cases} v_0 e^{-i\omega t} & \text{при } x^2 + y^2 < a^2 \\ 0 & \text{при } x^2 + y^2 > a^2. \end{cases} \tag{1}$$

Подобное задание скорости в плоскости излучателя, строго говоря, справедливо при наличии жесткого экрана, окружающего излучатель. В действительности экран отсутствует; поэтому получаемое ниже интегральное представление волнового пучка можно считать приближенно справедливым при $k_0 a \gg 1$ ($k_0 = \omega / c_0$ — волновое число) и для не слишком больших углов $\theta$.

Основываясь на результатах работы [2] и используя двойное преобразование Фурье, путем не очень сложных вычислений можно получить следующее выражение для потенциала смещения *

$$\varphi(x, y, z) = \frac{v_0 a^2}{2\pi\omega} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J_1(\sqrt{k_x^2 + k_y^2}\, a)}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}\, a} \frac{e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}}{k_z} dk_x dk_y. \tag{2}$$

* Здесь $\varphi(x, y, z)$ определено из $\operatorname{grad} \varphi = \int \mathbf{v} dt$; временной множитель $e^{-i\omega t}$ здесь и далее мы опускаем.

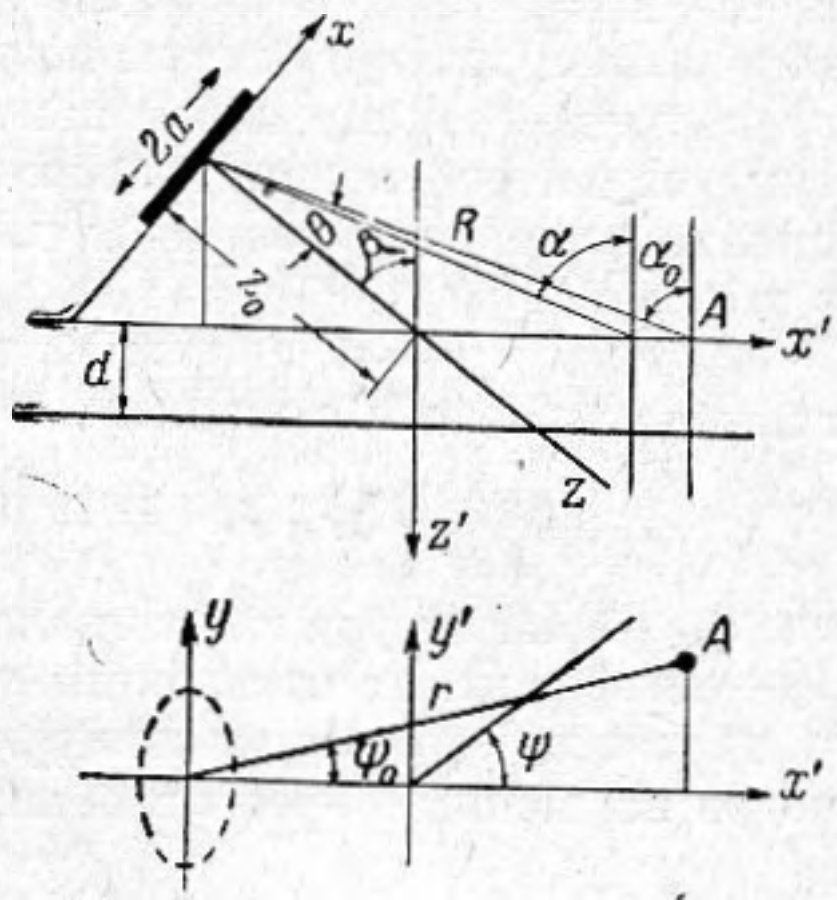
Здесь $J_1$ — бесселева функция первого порядка, $k_x$, $k_y$, $k_z$ — компоненты волнового вектора $\mathbf{k}_0$ в координатной системе $x$, $y$, $z$.

Выражение (2) дает интегральное представление поля падающего волнового пучка, построенное из элементарных плоских волн, направление распространения которых составляет различные углы с осью пучка. В этом выражении основную роль играет множитель

$$\frac{J_1\left(\sqrt{k_x^2+k_y^2}\,a\right)}{\sqrt{k_x^2+k_y^2}\,a}=\frac{J_1(k_0 a\sin\theta)}{k_0 a\sin\theta},$$

определяющий направленность пучка и при $k_0 a \gg 1$ существенно отличный от нуля лишь в малом интервале значений угла $\theta$. В связи с этим роль неоднородных волн, содержащихся в представлении (2), будет невелика, что дает нам возможность в дальнейшем ими пренебречь.

Преобразуем полученное выражение (2) к новым координатам $x'$, $y'$, $z'$ (фиг. 1), связанным с прежними координатами $x$, $y$, $z$ соотношениями




Фиг. 1

$$x = x'\cos\beta - z'\sin\beta, \qquad y = y', \qquad z = x'\sin\beta + z'\cos\beta + z_0. \tag{3}$$

Одновременно с этим последовательно перейдем в формуле (2) к новым переменным интегрирования, вначале к переменным $k_{x'}$, $k_{y'}$ ($k_{x'}$, $k_{y'}$, $k_{z'}$ — компоненты волнового вектора $\mathbf{k}_0$ в координатах $x'$, $y'$, $z'$), используя формулы:

$$\begin{aligned} k_x &= k_{x'}\cos\beta - k_{z'}\sin\beta,\\ k_y &= k_{y'},\\ k_z &= k_{x'}\sin\beta + k_{z'}\cos\beta \end{aligned} \tag{4}$$

и далее к переменным $\alpha$ и $\psi$ *, характеризующим направление распространения каждой из плоских волн в интеграле (2), используя при этом формулы:

$$\begin{aligned} k_{x'} &= k_0\sin\alpha\cos\psi,\\ k_{y'} &= k_0\sin\alpha\sin\psi,\\ k_{z'} &= k_0\cos\alpha. \end{aligned} \tag{5}$$

В результате мы получим

$$\varphi(x', y', z') = \frac{v_0 a^2}{2\pi c_0}\int_0^{\alpha_1}\int_0^{(\psi)2\pi}\frac{J_1\left[\sqrt{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\psi+(\sin\alpha\cdot\cos\psi\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)^2}\,k_0 a\right]}{\sqrt{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\psi+(\sin\alpha\cdot\cos\psi\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)^2}\,k_0 a}\times$$
$$\times e^{ik_0[(x'+z_0\sin\beta)\sin\alpha\cdot\cos\psi+y'\sin\alpha\cdot\sin\psi+(z'+z_0\cos\beta)\cos\alpha]}\sin\alpha\,d\psi\,d\alpha. \tag{6}$$

В соответствии с выражениями (5), интегрирование по $\alpha$ в выражении (6) должно выполняться от 0 до $\pi/2$ для волн, распространяющихся в направлении положительных $x'$ ($0 \leqslant \psi \leqslant \pi/2$, $3\pi/2 \leqslant \psi \leqslant 2\pi$) и от 0 до некоторого значения $\alpha_1(\psi)$, являющегося функцией переменной $\psi$, для волн, распространяющихся в направлении отрицательных $x'$ ($\pi/2 \leqslant \psi \leqslant 3\pi/2$).

* $\psi$ — азимутальный угол в плоскости $z' = 0$, причем направление $\psi = 0$ совпадает с осью $x'$.

Из фиг. 1 легко видеть, что $\alpha_1 = \pi / 2$ при $\psi = \pi / 2$ и $\psi = 3\pi / 2$, и $\alpha_1 = \pi / 2 - \beta$ при $\psi = \pi$. В дальнейшем нас будет интересовать лишь та часть волнового поля, которая построена из волн, распространяющихся в направлении положительных $x'$, и потому верхний предел в интегрировании по $\alpha$ для простоты мы примем равным $\pi / 2$.

Используя выражение (6), можно вычислить волновое поле, образующееся в пластине. В качестве величины, характеризующей звуковое поле в пластине, выберем нормальную компоненту смещения $\xi_{z'}$. Ее значение на верхней границе пластины легко может быть выражено через амплитуду падающей волны с использованием известного выражения коэффициента отражения волны от плоскопараллельной пластины, погруженной в жидкость.

Используя факт непрерывности нормальной компоненты смещения на границе пластины с жидкостью, получаем

$$\xi_{z'} \mid_{z'=0} = ik_0 \cos \alpha \varphi_m (1 - V) e^{ik_0 \sin \alpha x'}, \tag{7}$$

где $\varphi_m$ — амплитуда потенциала смещения в падающей на пластину волне, $V$ — коэффициент отражения от пластины.

Известную формулу коэффициента отражения от пластины [1] можно после несложных преобразований представить в виде

$$V = 1 + 2iZ_0 \frac{E_2 + iZ_0}{(E_1 + iZ_0)(F_1 - iZ_0)}, \tag{8}$$

где

$$E_1 = Z_1 \cos^2 2\alpha_2 \operatorname{ctg}\left(\frac{k_1 d \cos \alpha_1}{2}\right) + Z_2 \sin^2 2\alpha_2 \operatorname{ctg}\left(\frac{k_2 d \cos \alpha_2}{2}\right),$$

$$F_1 = Z_1 \cos^2 2\alpha_2 \operatorname{tg}\left(\frac{k_1 d \cos \alpha_1}{2}\right) + Z_2 \sin^2 2\alpha_2 \operatorname{tg}\left(\frac{k_2 d \cos \alpha_2}{2}\right),$$

$$E_2 = Z_1 \cos^2 2\alpha_2 \operatorname{ctg}(k_1 d \cos \alpha_1) + Z_2 \sin^2 2\alpha_2 \operatorname{ctg}(k_2 d \cos \alpha_2),$$

$$Z_0 = \frac{\rho_0 c_0}{\cos \alpha}, \quad Z_1 = \frac{\rho_1 c_1}{\cos \alpha_1}, \quad Z_2 = \frac{\rho_1 c_2}{\cos \alpha_2}, \quad k_1 = \frac{\omega}{c_1}, \quad k_2 = \frac{\omega}{c_2}.$$

Здесь $\rho_0$, $\rho_1$ — плотности жидкости и пластины, $c_1$, $c_2$ — скорости продольных и поперечных волн в материале пластины, $\alpha_1$, $\alpha_2$ — углы преломления продольных и поперечных волн в пластине, связанные с углом падения волны из жидкости $\alpha$ соотношениями $\frac{\sin \alpha_1}{c_1} = \frac{\sin \alpha_2}{c_2} = \frac{\sin \alpha}{c_0}$, $d$ — толщина пластины.

Используя формулы (6), (7) и (8), можно написать выражение для нормальной компоненты смещения на верхней границе пластины:

$$\xi_{z'}(x', y') = \frac{v_0 a^2 \omega}{\pi c_0^2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} Z_0 \frac{E_2 + iZ_0}{(E_1 + iZ_0)(F_1 - iZ_0)} \times$$

$$\times \frac{J_1 [\sqrt{\sin^2 \alpha \sin^2 \psi + (\sin \alpha \cos \psi \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta)^2} k_0 a]}{\sqrt{\sin^2 \alpha \sin^2 \psi + (\sin \alpha \cos \psi \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta)^2} k_0 a} \times$$

$$\times e^{ik_0[(x' + z_0 \sin \beta) \sin \alpha \cos \psi + y' \sin \alpha \sin \psi + z_0 \cos \beta \cos \alpha]} \cos \alpha \sin \alpha \, d\psi \, d\alpha. \tag{9}$$

Для оценки интеграла (9) применим асимптотические методы. Внутренний интеграл мы вычислим методом стационарной фазы. Используя первое приближение этого метода и вводя обозначения $x' + z_0 \sin \beta =$

$= r\cos\psi_0$, $y' = r\sin\psi_0$, где $r$, $\psi_0$ — полярные координаты точки наблюдения (фиг. 1), получим

$$\xi_{z'}(x', y') \simeq \frac{v_0 a^2 \omega}{\pi c_0^2} \sqrt{\frac{2\pi}{k_0 r}}\, e^{-i\frac{\pi}{4}} \int_0^{\pi/2} Z_0 \frac{E_2 + iZ_0}{(E_1 + iZ_0)(F_1 - iZ_0)} \times$$

$$\times \frac{J_1\left[\sqrt{\sin^2\alpha \sin^2\psi_0 + (\sin\alpha\cos\psi_0\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)^2}\, k_0 a\right]}{\sqrt{\sin^2\alpha\sin^2\psi_0 + (\sin\alpha\cos\psi_0\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)^2}\, k_0 a} \times$$

$$\times \cos\alpha \sqrt{\sin\alpha}\, e^{ik_0(r\sin\alpha + z_0\cos\beta\cos\alpha)}\, d\alpha. \qquad (10)$$

При вычислении оставшегося интеграла целесообразно применить метод перевала, поскольку подынтегральная функция в формуле (10) имеет существенные для нас полюса, лежащие в комплексной плоскости $\alpha = \alpha' + i\alpha''$. Эти полюса определяются уравнениями $E_1 + iZ_0 = 0$ и $F_1 - iZ_0 = 0$. Первое из этих уравнений, как известно, представляет собой дисперсионное уравнение для симметричных нормальных волн, второе — для антисимметричных.

Вводя обозначения $r = R\sin\alpha_0$, $z_0\cos\beta = R\cos\alpha_0$, где $R$, $\alpha_0$ — координаты точки наблюдения $A$ (фиг. 1), мы получим в результате вычислений

$$\xi_{z'}(x', y') \simeq \frac{v_0 a^2 \omega}{\pi c_0^2} \sqrt{\frac{2\pi}{k_0 R\sin\alpha_0}}\, e^{-i\frac{\pi}{4}} \sum_{i=1}^{n} A(\alpha_i) \times$$

$$\times \frac{J_1\left[\sqrt{\sin^2\alpha_i\cdot\sin^2\psi_0 + (\sin\alpha_i\cos\psi_0\cos\beta - \cos\alpha_i\sin\beta)^2}\, k_0 a\right]}{\sqrt{\sin^2\alpha_i\sin^2\psi_0 + (\sin\alpha_i\cdot\cos\psi_0\cos\beta - \cos\alpha_i\sin\beta)^2}\, k_0 a} \times$$

$$\times \cos\alpha_i \sqrt{\sin\alpha_i}\, e^{ik_0 R\cos(\alpha_0 - \alpha_i)} + \frac{2v_0 a^2}{c_0}\cdot\frac{1}{R}\left| Z_0 \frac{E_2 + iZ_0}{(E_1 + iZ_0)(F_1 - iZ_0)}\right|_{\alpha=\alpha_0} \times$$

$$\times \frac{J_1\left[\sqrt{\sin^2\alpha_0\sin\psi_0 + (\sin\alpha_0\cos\psi_0\cos\beta - \cos\alpha_0\sin\beta)^2}\, k_0 a\right]}{\sqrt{\sin^2\alpha_0\sin^2\psi_0 + (\sin\alpha_0\cos\psi_0\cos\beta - \cos\alpha_0\sin\beta)^2}\, k_0 a} \cdot \cos\alpha_0 e^{ik_0 R - i\frac{\pi}{2}}. \qquad (11)$$

Здесь $A(\alpha_i)$ — постоянные вычетов в полюсах подынтегрального выражения

$$A(\alpha_i) = 2\pi i \lim_{\alpha\to\alpha_i}\left[Z_0 \frac{E_2 + iZ_0}{(E_1 + iZ_0)(F_1 - iZ_0)}(\alpha - \alpha_i)\right].$$

Первый член выражения (11), представляющий собой сумму вычетов и дает нормальную составляющую смещения, обязанную своим происхождением распространяющимся в пластине нормальным волнам. Поскольку полюса $\alpha_i$ расположены выше действительной оси плоскости $\alpha = \alpha' + i\alpha''$ (влияние жидкости, окружающей пластину), нормальные волны в выражении (11) будут затухающими.

Второй член в выражении (11), убывающий с расстоянием как $1/R$, дает нормальную составляющую смещения в пластине, обязанную своим происхождением распространяющимся в ней продольным и поперечным волнам. Отметим, что асимптотическая формула (11) справедлива при $k_0 R\sin^2\alpha_0 \gg 1$ и $R > a^2/\lambda_0\cos(\alpha_0 - \beta)$, где $\lambda_0$ — длина звуковой волны в жидкости.

Остановимся на некоторых следствиях полученного выражения.

Полагая $\alpha_0 = \alpha_i'$, $\psi_0 = 0$, из формулы (11) можно получить зависимость амплитуды нормальной волны в пластине от угла наклона вибратора

$$\Phi_1(\beta) = \left|\frac{2J_1[k_0 a\sin(\alpha_i' - \beta)]}{k_0 a\sin(\alpha_i' - \beta)}\right|, \qquad (12)$$

нормированную к единице при $\beta = \alpha_i'$. При выводе формулы (12) допущено, что $\alpha_i'' \ll \alpha_i'$, что равносильно не очень сильному затуханию нормальных волн. Формула (12) позволяет оценить критичность амплитуды возбуждаемой нормальной волны по отношению к изменению угла наклона вибратора.

Дифракционное расхождение пучка нормальных волн в плоскости $z' = 0$ в общем случае определяется формулой

$$\Phi_2(\psi_0, \beta) = \left| \frac{\dfrac{J_1\left[\sqrt{\sin^2\alpha_i \sin^2\psi_0 + (\sin\alpha_i \cos\psi_0 \cos\beta - \cos\alpha_i \sin\beta)^2}\, k_0 a\right]}{\sqrt{\sin^2\alpha_i \sin^2\psi_0 + (\sin\alpha_i \cos\psi_0 \cos\beta - \cos\alpha_i \sin\beta)^2}\, k_0 a}}{\dfrac{J_1[k_0 a \sin(\alpha_i - \beta)]}{k_0 a \sin(\alpha_i - \beta)}} \right|. \quad (13)$$

Если угол падения пучка выбран так, что $\beta = \alpha_i'$ («условие совпадения»), то при допущении $\alpha_i'' \ll \alpha_i'$ получаем

$$\Phi_2(\psi_0) = \left| \frac{J_1\left[2\sin\alpha_i' \sin\frac{\psi_0}{2} \sqrt{1 - \sin^2\alpha_i' \sin^2\frac{\psi_0}{2}}\, k_0 a\right]}{\sin\alpha_i' \sin\frac{\psi_0}{2} \sqrt{1 - \sin^2\alpha_i' \sin^2\frac{\psi_0}{2}}\, k_0 a} \right|. \quad (14)$$

Из формулы (13) несложно получить выражение для половинного угла раскрытия основного лепестка диаграммы направленности:

$$\psi_{00} = \arccos\left[\frac{1}{\sin\alpha_i' \sin\beta}\left(\sqrt{1 - \left(\frac{0{,}61\lambda_0}{a}\right)^2} - \cos\alpha_i' \cos\beta\right)\right]. \quad (15)$$

Здесь $\lambda_0$ — длина звуковой волны в жидкости. При $\beta = \alpha_i'$, учитывая, что $k_0 a \gg 1$, мы получаем:

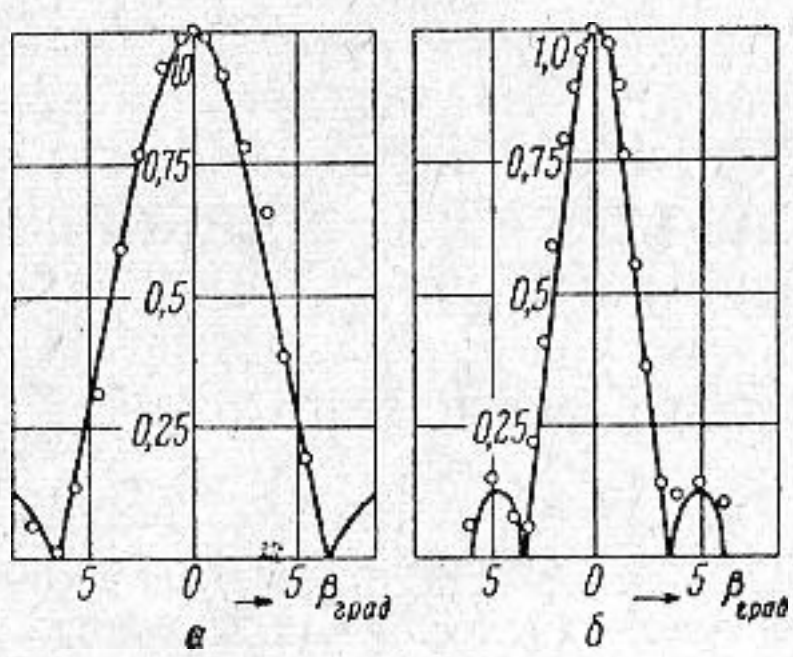
$$\psi_{00} \simeq \arccos\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{0{,}61\lambda_0}{a \sin\alpha_i'}\right)^2\right]. \quad (16)$$

Формула (16) показывает, что с уменьшением угла $\alpha_i'$, т. е. угла падения звукового пучка ($\beta = \alpha_i'$), направленность пучка нормальных волн ухудшается. Этот результат физически понятен: нормальные волны, возбуждающиеся под большими углами $\alpha_i'$, имеют меньшую скорость распространения. Таким образом, для получения более остро направленного пучка нормальных волн следует использовать те нормальные волны в пластине, которые возбуждаются при бо́льших углах $\alpha_i'$.

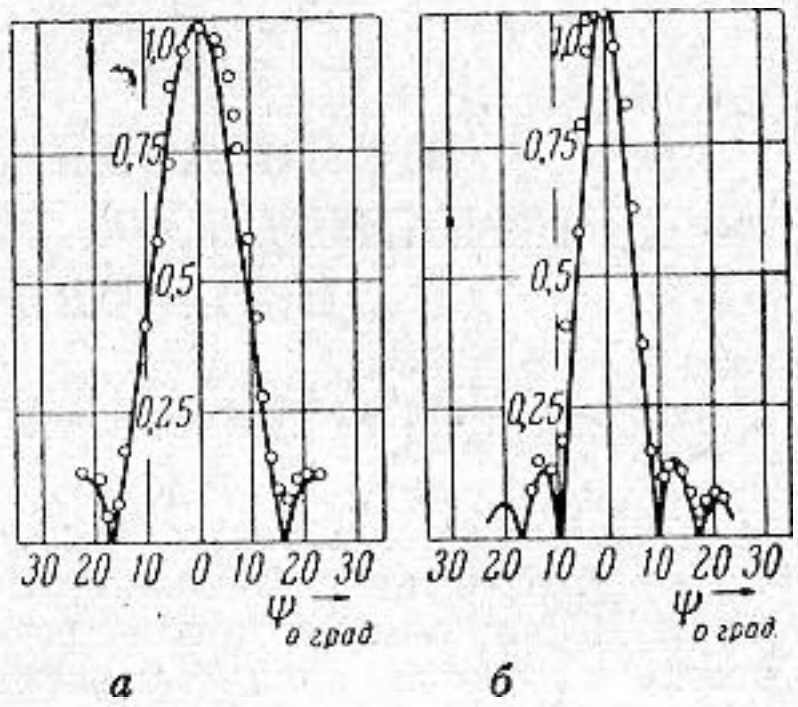
Соотношения (12) и (14) были подвергнуты экспериментальной проверке. Эксперименты проводились на установке, включавшей в себя заглушенный бак с координатным устройством и укрепленными на нем пьезопреобразователями и электронную аппаратуру. Последняя представляла собой обычную импульсную установку, позволявшую получать импульсы прямоугольной формы с плавным изменением частоты заполнения в диапазоне 0,5÷5,0 *Мгц* и регулировкой амплитуды и длительности сигнала. Приемная часть установки состояла из широкополосного усилителя с коэффициентом усиления $3 \cdot 10^4$, аттенюатора и осциллоскопа ИО-4. В качестве преобразователей применялись пьезокварцевые пластины X-среза различного диаметра с резонансными частотами от 0,6 до 3 *Мгц*. Пластины были вклеены по образующей специальным компаундом в съемные корпуса. Это позволило в процессе эксперимента достаточно просто менять пьезокварцевые вибраторы. Нормальные волны возбуждались в стальных шлифованных образцах, которые были изготовлены из одного

листа при тщательном соблюдении плоскопараллельности поверхностей пластины.

Параметр $fd$ ($f$ — частота) в опытах варьировался в пределах $1{,}8 \div 10{,}6$ *Мгц · мм*. Угол падения звукового пучка на пластину (и соответственно угол наклона приемного вибратора) плавно изменялся от 0 до 32°, причем точность отсчета угла составляла 15′. Вместе с тем координатное устройство позволяло изменять взаимное расположение пьезопреобразователей в вертикальной и горизонтальной плоскостях. Описанные условия выполнения опытов позволяли возбуждать в стальных пластинах $S$- и $a$-




Фиг. 2




Фиг. 3

нормальные волны, вплоть до $S_4$ и $a_4$ в достаточно широком диапазоне изменения параметра $fd$.

В процессе экспериментов было выяснено, что углы возбуждения нормальных волн $\alpha_i'$ достаточно хорошо совпадают со значениями, найденными по дисперсионным кривым для стальной пластины в вакууме [3], что указывает на несущественное влияние воды на фазовую скорость нормальных волн в исследованном диапазоне углов падения и параметра $fd$. При экспериментальной проверке зависимостей (12) и (14) высота поднятия вибраторов над пластиной ($z_0 \cos \beta$) была около 40 *мм*, расстояние между излучающим и приемным вибраторами составляло 180 *мм* и более, что удовлетворяло условиям применимости этих формул $k_0 R \sin^2 \alpha_0 \gg 1$ и $R > a^2 / \lambda \cos(\alpha_0 - \beta)$.

Расчетные и экспериментальные зависимости амплитуды нормальной волны от угла $\beta$ представлены на фиг. 2 (2, *а* — при $f = 0{,}6$ *Мгц*, $k_0 a = 32{,}7$, возбуждаемая мода $S_0$; 2, *б* — при $f = 1{,}3$ *Мгц*, $k_0 a = 62{,}6$, возбуждаемая мода $S_1$). При снятии этих зависимостей угол наклона приемного вибратора был постоянным, а излучающего — изменялся.

Зависимость, определяющая направленность пучка нормальных волн в случае $\beta = \alpha_i'$ (формула (14)), представлена на фиг. 3 (3, *а* — при $f = 1{,}3$ *Мгц*, $a = 11{,}5$ *мм*, $\beta = 12{,}5°$, возбуждаемая мода $S_2$; 3, *б* — при $f = 1{,}3$ *Мгц*, $a = 11{,}5$ *мм*, $\beta = 23°$, возбуждаемая мода $a_1$).

В обоих случаях сплошные кривые — расчетные, точками обозначены экспериментальные значения. Совпадение экспериментальных и расчетных значений вполне удовлетворительное.

## ЛИТЕРАТУРА


1. A. Schoch. Der Schalldurchgang durch Platten. Acustica, 1952, **2**, 1, 1—17.
2. Л. М. Бреховских. Волны в слоистых средах, М., Изд-во АН СССР, 1957.
3. R. Pohlman. Probleme der Ultraschallübertragung an Grenzflächen. Acustica, 1960, **10**, 4, 217—229.



Ленинградский электротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина)
Ленинград



Поступила в редакцию
8 апреля 1963 г.