В связи с вопросом излучения звука в жидкость при резонансных колебаниях пластин удобный метод визуализации заключается в фотографировании поверхности слоя жидкости, налитого на пластину, в отраженном свете. По существу этот метод является видоизменением метода «ряби», применяемого в ультраакустике. На фиг. 2—4 показаны картины на поверхности тонкого (10 *мм*) слоя воды, налитого на металлическую пластину толщиной 3 *мм* (по краям пластины сделаны бортики). Частоты клебаний, к которым относятся фиг. 2—4, равны соответственно 150, 300 и 500 *гц*.

Из фигур прежде всего видно, что места резонансных колебаний изгиба пластины очень четко очерчиваются районами ряби. По мере увеличения частоты, т. е. уменьшения длины волны колебаний, уменьшается размер отдельных рябинок в областях излучения и длина «лучей» по краям этих областей. В то время, как в этих лучах рябь носит регулярный характер, что указывает на одностороннее излучение, в средней части областей излучения рябь весьма нерегулярна вследствие наложения колебаний, излученных различными точками этой части пластины.

С известным приближением результаты, получаемые для слоя жидкости с малой диссипацией, можно распространить на случай излучения звука в полубезграничный объем этой жидкости. Для подобного объема импеданц соколеблющейся массы жидкости $z = i\omega(\rho\lambda_{\text{и}}/2\pi)$, где ω — круговая частота, ρ — плотность жидкости, $\lambda_{\text{и}}$ — длина волны изгиба в пластине. Для тонкого слоя жидкости высотой h соответствующий импеданц равен $z_c = i\omega\rho h$. Очевидно, при условии $h \simeq (\lambda_{\text{и}}/2\pi)$ реакция слоя жидкости будет близка к реакции полубезграничного ее объема.

Отметим также, что при толщинах металлических пластин более 2 *мм* абсолютное значение реакции слоя жидкости до частот в несколько сот герц в десятки и сотни раз меньше импеданца пластины в точках ее возбуждения, т. е. изменение высоты слоя жидкости при данном вибраторе не приводит к заметному изменению режима колебаний пластины.

Автор благодарит Б. А. Колосова за помощь при производстве опытов.

Ленинград

Поступило в редакцию
2 августа 1963 г.

УДК 534.23

ОБ ОДНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ПОЛЯ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА В ДВИЖУЩЕЙСЯ СРЕДЕ

Л. М. Лямшев

В теории распространения звуковых и электромагнитных волн широкое применение получил метод Бреховских [1], когда волновое поле представляется в виде разложения по плоским волнам. Метод оказывается удобным для решения довольно широкого класса краевых задач теории распространения звука в движущейся среде. Для этого, как и в упомянутом выше случае неподвижной среды, должно быть известно разложение по плоским волнам поля точечного источника в движущейся среде. Одно из возможных таких разложений, аналогичное в известном смысле интегральному представлению [1], приводится ниже.

Выражение, описывающее поле точечного источника в движущейся однородной среде, имеет вид

$$\varphi(\mathbf{r},\ t) = \frac{\exp\left[i\dfrac{k_0}{1-M^2}R^*\right]\exp[-i\omega t]}{R}, \tag{1}$$

где $R^2 = x^2 + (1-M^2)(y^2+z^2)$, $R^* = -Mx + R$, $k_0 = \dfrac{\omega}{c}$, $M = V/c$,

ω — частота, c — скорость звука в покоящейся среде, V — скорость движения среды. Множитель $e^{-i\omega t}$ всюду в дальнейшем опускается. Функция φ с точностью до постоянной является решением уравнения

$$\left[\Delta - \frac{1}{c^2}\left(-i\omega + V\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\right]\varphi = -\delta(\mathbf{r}). \tag{2}$$

Перейдем к «поджатой» системе координат

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{1-M^2}};\quad y = y;\quad z = z. \tag{3}$$

В новой системе координат выражение (1) примет вид

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{1-M^2}} \frac{\exp\left[i\frac{k_0 M}{\sqrt{1-M^2}}\xi\right]\exp\left[i\frac{k_0}{\sqrt{1-M^2}}\sqrt{\xi^2+y^2+z^2}\right]}{\sqrt{\xi^2+y^2+z^2}}. \tag{4}$$

Воспользовавшись известным разложением [1], мы получаем

$$\frac{\exp\left[i\frac{k_0}{\sqrt{1-M^2}}\sqrt{\xi^2+y^2+z^2}\right]}{\sqrt{\xi^2+y^2+z^2}} = \frac{i}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[ip_\xi\xi + ip_y y \pm ip_z z\right]\frac{dp_\xi dp_y}{p_z}, \tag{5}$$

где

$$p_\xi^2 + p_y^2 + p_z^2 = p^2 = \frac{k_0^2}{1-M^2};$$

знак + соответствует точкам, лежащим в полупространстве $z > 0$, и волнам, распространяющимся в направлении положительных z, а знак минус соответствует точкам, для которых $z < 0$.

Подставляя выражение (5) в формулу (4) и переходя к первоначальной системе координат x, y, z, получим

$$\frac{\exp\left[i\frac{k_0}{1-M^2}R^*\right]}{R} = \frac{i}{2\pi\sqrt{1-M^2}}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[i\left(\frac{p_\xi}{\sqrt{1-M^2}} - \frac{k_0 M}{1-M^2}\right)x + \right.$$
$$\left. + ip_y y \pm ip_z z\right]\frac{dp_\xi dp_y}{p_z}. \tag{6}$$

Формула (6) представляет собой разложение поля точечного источника в движущейся среде по плоским волнам. В самом деле, выражение

$$\exp\left[i\left(\frac{p_\xi}{\sqrt{1-M^2}} - \frac{k_0 M}{1-M^2}\right)x + ip_y y \pm ip_z z\right]$$

описывает плоскую волну в движущейся среде. Прямой подстановкой этого выражения в уравнение (2) можно убедиться, что оно является решением уравнения (2) с правой частью, равной нулю.

Разложению (6) можно придать несколько иной вид, если ввести сферическую систему координат и выразить компоненты волнового вектора p через углы падения θ и φ.

Введем обозначения

$$p_\xi = \frac{k_0}{\sqrt{1-M^2}}\sin\theta\cos\varphi, \quad p_y = \frac{k_0}{\sqrt{1-M^2}}\sin\theta\sin\varphi, \tag{7}$$
$$p_z = \frac{k_0}{\sqrt{1-M^2}}\cos\theta.$$

Пользуясь выражениями (5) и (7), напишем формулу (4) в виде

$$\varphi = \frac{ik_0}{2\pi(1-M^2)}\int\limits_0^{\pi/2-i\infty}\int\limits_0^{2\pi}\exp\left[i\frac{k_0}{\sqrt{1-M^2}}(\sin\theta\cos\varphi\xi - M\xi + \sin\theta\sin\varphi \pm\right.$$
$$\left.\pm\cos\theta z)\right]\sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

Обозначим $\xi = \rho\cos\varphi_1$, $y = \rho\sin\varphi$, $\rho^2 = \xi^2 + y^2$ и, пользуясь интегральным представлением функции Бесселя нулевого порядка

$$J_0\left(\frac{k_0}{\sqrt{1-M^2}}\rho\sin\theta\right) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\exp\left[i\frac{k_0}{\sqrt{1-M^2}}\rho\sin\theta\cos(\varphi_1-\varphi)\right]d\varphi,$$

получаем окончательно

$$\frac{\exp\left[i\,\frac{k_0}{1-M^2}R^*\right]}{R}=\frac{ik_0}{1-M^2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-i\infty} J_0\left(\frac{k_0}{1-M^2}\,r\sin\theta\right)\exp\left[-i\,\frac{k_0M}{1-M^2}\,x\right]\times$$

$$\times\exp\left[\pm i\,\frac{k_0}{\sqrt{1-M^2}}\cos\theta z\right]\sin\theta\, d\theta.$$

где

$$r^2=x^2+(1-M^2)\,y^2.$$

В заключение заметим, что из формул (6) и (8) при $M=0$ следуют известные разложения [1] для поля точечного источника в неподвижной среде.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Бреховских. Волны в слоистых средах. М., Изд-во АН СССР, 1957, 213.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступило в редакцию
21 сентября 1963 г.