АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том IX 1963 Вып. 4

УДК 534.23

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ ПОЛЕЙ, ИЗЛУЧЕННЫХ СЛУЧАЙНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ НА ПЛОСКОСТИ

Б. Ф. Курьянов

Рассматривается связь пространственной функции корреляции источников на плоскости с корреляцией полей, излученных этими источниками. Показано, что вид функции источников переносится без изменения на параллельные плоскости, если источники на плоскости не излучают неоднородных волн. Получены выражения для функций корреляции в направлении параллельном излучающей поверхности и в направлении нормали к этой поверхности («горизонтальной» и «вертикальной» корреляции) в зависимости от корреляционных характеристик источников и показано, что радиус вертикальной корреляции в $k\rho_x$ раз больше, чем радиус горизонтальной корреляции ρ_x. Находятся также корреляционные характеристики шумовых полей, излученных источниками, которые некоррелированы как по пространству, так и по времени.

Ряд задач акустики и электродинамики сводится к вопросу об излучении волн случайными источниками, распределенными по некоторой поверхности. Сюда относится, например, задача вычисления интенсивности шумов моря, вызванных некоррелированными источниками на морской поверхности [1], излучения полей случайными токами, текущими по поверхности металла при наличии сильного скин-эффекта [2], излучения звука случайно колеблющейся поверхностью [3, 4] и так далее. Интенсивность излученного поля, вычисляемая в большинстве случаев, не характеризует полностью случайное поле и в ряде практических задач необходимо знать пространственно-временные корреляционные функции поля [3]. К необходимости введения корреляционных функций приводит, например, анализ работы направленных звукоприемных систем при наличии шумов моря [5]. Использование пространственно-временных корреляционных функций оказалось также весьма плодотворным в оптике и дает возможность определить общее понятие о когерентности волновых полей [6, 7].

Настоящая статья посвящена рассмотрению общих корреляционных характеристик полей, излученных случайными монохроматическими и немонохроматическими источниками, распределенными по плоскости, и применениям этих общих свойств к случаю источников с определенными видами корреляционных функций. Полученные результаты могут быть применены, в частности, к вопросу о корреляционных характеристиках шумов моря, вызванных источниками на поверхности.

Рассмотрим сначала тот случай, когда на плоскости $z = 0$ распределены монохроматические источники с частотой ω, причем их амплитуды описываются однородной по координатам x и y случайной комплексной функцией $\varphi(x, y)$, т. е. функция корреляции амплитуд $B(\sigma_x, \sigma_y) = \langle\varphi(x, y) \times \times \varphi^*(x - \sigma_x, y - \sigma_y)\rangle$ зависит только от разностей σ_x и σ_y (здесь и далее символ $\langle\rangle$ означает статистическое усреднение, а $*$— комплексно-сопряженную величину). Функция корреляции полей, записанных в комплекс-

ной форме, будет, вообще говоря, тоже комплексной функцией; для нахождения функции корреляции соответственного действительного поля достаточно просто взять действительную часть этой комплексной функции. Как известно (например, [7, 8]), двумерную однородную случайную функцию можно представить в виде интеграла Фурье — Стильтьеса:

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x + i\eta y} dF(\xi, \eta), \tag{1}$$

где $F(\xi, \eta)$ — случайная функция с некоррелированными приращениями, обладающая следующими свойствами:

$$\langle dF(\xi, \eta)\rangle = 0, \quad \langle dF(\xi, \eta)\, dF^*(\xi', \eta')\rangle = \left.\begin{matrix} f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \\ 0 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \xi = \xi', \quad \eta = \eta' \\ \xi \neq \xi' \text{ или } \eta \neq \eta'. \end{matrix} \tag{2}$$

Здесь $f(\xi, \eta)$ — неотрицательная функция, характеризующая спектральную плотность в интервале $d\xi d\eta$. Пользуясь представлением (1) и свойствами (2), легко получить формулу Винера — Хинчина, связывающую функцию корреляции $B(\sigma_x, \sigma_y)$ со спектральной плотностью $f(\xi, \eta)$:

$$B(\sigma_x, \sigma_y) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta)\, e^{i(\xi\sigma_x + \eta\sigma_x)} d\xi d\eta, \tag{3}$$

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} B(\sigma_x, \sigma_y)\, e^{-i(\xi\sigma_x + \eta\sigma_y)} d\sigma_x d\sigma_y. \tag{4}$$

Случайное поле, которое создают во всем полупространстве $z > 0$ источники, расположенные на плоскости $z = 0$, будем искать в виде

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i[\xi x + \eta y + \sqrt{k^2 - (\xi^2 + \eta^2)} \cdot z]} dF(\xi, \eta), \tag{5}$$

где $k = \omega/c$, c — скорость распространения волн в среде.

Выражение (5) представляет собой суперпозицию плоских волн с волновыми векторами $\mathbf{k} = \{\xi, \eta, \sqrt{k^2 - (\xi^2 + \eta^2)}\}$ и случайными амплитудами, которые, согласно (2), некоррелированы для различных направлений волнового вектора $\mathbf{k}$. Будучи суперпозицией плоских волн, $\varphi(x, y, z)$ удовлетворяет волновому уравнению; кроме того, при $z = 0$ автоматически выполняется условие на границе (1). Следовательно, выражение (5) является решением задачи.

С целью сокращения будем далее пользоваться векторной записью всех пространственных величин; в частности, вектор точки наблюдения с координатами $\{x, y, z\}$ будем обозначать через $\mathbf{R}$. Для удобства дальнейших рассчетов разобьем область интегрирования в выражении (5) на две области: $k^2 > \xi^2 + \eta^2$ и $k^2 < \xi^2 + \eta^2$. Тогда во второй области $[k^2 - (\xi^2 + \eta^2)]^{1/2}$ будет чисто мнимой величиной: $[k^2 - (\xi^2 + \eta^2)]^{1/2} = i\alpha$, где $\alpha = [(\xi^2 + \eta^2) - k^2]^{1/2} \geqslant 0$. Найдем теперь функцию корреляции полей в двух произвольных точках $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R} - \boldsymbol{\rho}$:

$$\Gamma(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) = \langle \varphi(\mathbf{R})\, \varphi^*(\mathbf{R} - \boldsymbol{\rho})\rangle = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{k^2 > \xi^2 + \eta^2} e^{i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}} f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + \\ + \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{k^2 < \xi^2 + \eta^2} e^{i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho} - 2\alpha z} f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta. \tag{6}$$

Из формулы (6) видно, что функция корреляции $\Gamma(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho})$ определяется как незатухающими плоскими волнами ($k^2 > \xi^2 + \eta^2$), так и неоднородными волнами ($k^2 < \xi^2 + \eta^2$). При наличии неоднородных волн функция корреляции, вообще говоря, зависит не только от разности координат точек наблюдения ρ, но также и от z. Величину второго интеграла, дающего зависимость от z, нетрудно оценить:

$$\left| \iint\limits_{k^2<\xi^2+\eta^2} e^{i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}-2\alpha z} f(\xi, \eta)\, d\xi d\eta \right| \leqslant \iint e^{-2\alpha z} f(\xi, \eta)\, d\xi d\eta = e^{-2\bar{\alpha} z} \iint f(\xi, \eta)\, d\xi d\eta.$$

Здесь $\bar{\alpha} = (\bar{\xi}^2 + \bar{\eta}^2 - k^2)^{1/2}$, где $\bar{\xi}$ и $\bar{\eta}$ — некоторые значения ξ и η из области $k^2 < \xi^2 + \eta^2$. Таким образом, второй член в выражении (6) экспоненциально затухает, так что при больших z этим членом можно пренебречь. В этом случае случайное поле становится однородным, и мы можем написать

$$\Gamma(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) = \Gamma(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{k^2>\xi^2+\eta^2} e^{i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}} f(\xi, \eta)\, d\xi d\eta. \tag{7}$$

В дальнейшем нам будет удобнее иметь дело не с пространственной плотностью спектра $f(\xi, \eta)$, а с плотностью энергии плоских волн, бегущих под углами θ и φ в сферических координатах, т. е. перейти от ξ и η к новым переменным: $\xi = k_x = k \sin\theta \cos\varphi$, $\eta = k_y = k \sin\theta \sin\varphi$. Положим также $k^2 f(\xi, \eta) \cos\theta = g(\theta, \varphi)$. Тогда уравнения (4), (3), (7) перейдут в следующие:

$$g(\theta, \varphi) = \frac{k^2 \cos\theta}{2\pi} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} B(\sigma_x, \sigma_y)\, e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{\sigma}} d\sigma_x d\sigma_y, \tag{8}$$

$$B(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi/2-i\infty} g(\theta, \varphi)\, e^{i(k_x\sigma_x + k_y\sigma_y)} \sin\theta\, d\varphi d\theta, \tag{9}$$

$$\Gamma(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi/2} g(\theta, \varphi)\, e^{i(k_x\rho_x + k_y\rho_y + k_z\rho_z)} \sin\theta\, d\varphi d\theta. \tag{10}$$

Сравнение формул (9) и (10) показывает, что обе формулы имеют одинаковый вид: как $B(\boldsymbol{\sigma})$, так и $\Gamma(\boldsymbol{\rho})$ есть преобразование Фурье от одной и той же функции $g(\theta, \varphi)$. Разница состоит в том, что в формуле (9) $\boldsymbol{\sigma}$ — вектор на плоскости, а в (10) $\boldsymbol{\rho}$ — пространственный вектор и интегрирование в формуле (10) распространяются только на область действительных углов θ. Отсюда следует, что если угловая плотность энергии $g(\theta, \varphi)$, определяемая из формулы (8), отлична от нуля только для действительных углов θ, и вектор $\boldsymbol{\rho}$ лежит в плоскости $\rho_z = 0$, то формулы (9) и (10) полностью совпадают и $\Gamma(\boldsymbol{\rho}) = B(\boldsymbol{\sigma})$. Иначе говоря, если источники на поверхности $z = 0$ не излучают неоднородных волн, то функция корреляции $B(\boldsymbol{\sigma})$ переносится без изменения на любую плоскость $z = \text{const}$. В противном случае функция корреляции не сохраняется. Так, например, при разложении в интеграл Фурье функции $\exp\{-|\sigma|/\sigma_0\}$ или $\exp\{-\sigma^2/\sigma_0^2\}$ угловой спектр $g(\theta, \varphi)$ не равен нулю для всех углов, как действительных, так и мнимых. Следовательно, такие корреляционные функции, строго говоря, не переносятся. Если радиус корреляции σ_0 велик ($k\sigma_0 \gg 1$), то спектр $g(\theta, \varphi)$ лежит почти целиком в области действительных углов; в этом случае функция корреляции переносится почти полностью. Отсюда становится ясным решение обратной задачи — вос-

становление пространственной корреляционной функции источников по корреляционным функциям наблюдаемого поля излучения: такое восстановление можно провести лишь в грубых чертах; мелкую пространственную структуру, которая дает составляющую спектра $g(\theta, \varphi)$ в области мнимых углов θ, восстановить нельзя. Таким образом, это положение, известное для самих полей, оказывается применимым и к квадратичным величинам, каковыми являются корреляционные функции.

Заметим, что выводы о переносе пространственной корреляционной функции справедливы для общего случая анизотропных случайных источников. Если источники изотропны, т. е. функция корреляции на поверхности $B(\sigma)$ зависит только от модуля вектора σ, то выражения (8) и (10) упрощаются и принимают следующий вид:

$$g(\theta) = k^2 \cos\theta \int_0^\infty B(\sigma)\, I_0(k\sigma \sin\theta)\, \sigma d\sigma, \tag{11}$$

$$\Gamma(\rho) = \int_0^{\pi/2} g(\theta)\, e^{ik\rho\cos\alpha\cos\theta}\, I_0(k\rho \sin\alpha \sin\theta) \sin\theta d\theta \tag{12}$$

(в последнем равенстве использовано выражение для $\boldsymbol{\rho}$ в сферических координатах $\boldsymbol{\rho} = \{\rho \sin\alpha \cos\beta,\ \rho \sin\alpha \sin\beta,\ \rho\cos\alpha\}$. Формула (12) дает возможность вычислять корреляционные функции при произвольной ориентации двух точек наблюдения. В дальнейшем мы ограничимся вычислением «горизонтальной» ($\alpha = \pi/2$) и «вертикальной» ($\alpha = 0$) корреляций, которые будем обозначать, соответственно, $\Gamma_г$ и $\Gamma_в$. Для сравнения степени убывания пространственной корреляции удобно ввести понятие «радиуса» корреляции, определив его следующим образом:

$$\rho_0 = \int_0^\infty |\Gamma(\rho)|^2 d\rho. \tag{13}$$

Радиус вертикальной корреляции ρ_{0z} можно получить для общего случая, не вычисляя $\Gamma_в(\rho)$, если известна функция $g(\theta)$. Для этого в (13) подставим выражение для $\Gamma_в(\rho)$ из формулы (12):

$$\rho_{0z} = \int_0^\infty d\rho \left(\int_0^{\pi/2} g(\theta)\, e^{ik\rho\cos\theta} \sin\theta d\theta \right)^2 =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} g(\theta)\, g(\theta') \sin\theta \sin\theta' d\theta d\theta' \int_0^\infty e^{ik\rho(\cos\theta - \cos\theta')} d\rho.$$

Заметим, что внутренний интеграл равен $\pi\delta[k(\cos\theta - \cos\theta')]$, где δ — дельта-функция Дирака. Нам понадобится следующее свойство δ-функции (см. [9], стр. 231): $\int F(x)\, \delta(f(x))\, dx = F(x_0) \Big/ \left|\frac{\partial}{\partial x} f(x_0)\right|$, где x_0 — корень уравнения $f(x) = 0$. Используя это свойство, легко провести интегрирование по θ'. Тогда получаем окончательно

$$\rho_{0z} = \frac{\pi}{k} \int_0^{\pi/2} g^2(\theta) \sin\theta d\theta. \tag{14}$$

Формула (14) удобна для вычисления радиуса вертикальной корреляции в случае, когда из каких-либо соображений известно распределение

плотности энергии шумового поля по направлениям θ. В качестве примера рассмотрим источники на поверхности, для которых функция корреляции имеет следующий вид:

$$B_{-}(\sigma) = \frac{2I_1(\sigma/\sigma_0)}{\sigma/\sigma_0}. \tag{15}$$

Выбор $B(\sigma)$ в виде (15) удобен по той причине, что спектр $g(\theta)$ равен нулю вне интервала углов $[0, \theta_0]$.

$$g(\theta)=k^2\cos\theta\int_0^\infty B(\sigma)\,I_0(k\sigma\sin\theta)\,\sigma\,d\sigma=\begin{cases}2\,(k\sigma_0)^2\cos\theta, & 0\leqslant\theta\leqslant\theta_0\\ 0, & \theta \text{ вне } [0,\theta_0]\end{cases},\ \sin\theta_0=1/k\sigma_0. \tag{16}$$

При выполнении условия $k\sigma_0 \geqslant 1$ спектр $g(\theta)$ целиком находится в области действительных углов, т. е. функция горизонтальной корреляции (15) целиком переносится. Функция вертикальной корреляции находится по формуле (12) при $\alpha = 0$:

$$\Gamma_в(\rho) = 2\,(k\sigma_0)^2\int_0^{\theta_0}\cos(k\rho\cos\theta)\cos\theta\,\sin\theta\,d\theta =$$

$$= \frac{2\,(k\sigma_0)^2}{(k\rho)^2}\left\{k\rho\sin k\rho\left(1 - x_0\frac{\sin k\rho x_0}{k\rho}\right) - 2\sin\left[\frac{k\rho}{2}(1+x_0)\right]\sin\left[\frac{k\rho}{2}(1-x_0)\right]\right\}. \tag{17}$$

Здесь $x_0 = [1 - 1/(k\sigma_0)^2]^{1/2}$. Таким образом, вертикальная корреляция оказывается сложной осциллирующей функцией $k\rho$. Сравним теперь радиусы горизонтальной и вертикальной корреляций. Согласно определению (13), радиус горизонтальной корреляции ρ_{0x} для $B(\sigma)$ в виде (15) равен $\rho_{0x} = \frac{16}{3\pi}\sigma_0$. Радиус вертикальной корреляции, согласно формуле (14), будет

$$\rho_{0z} = \frac{4\pi}{3k}(k\sigma_0)^2\,(1 - \cos^3\theta_0).$$

При $\theta_0 = \pi/2$ (чему соответствует $k\sigma_0 = 1$) имеем $\rho_{0z} = \frac{4\pi}{3k} \approx 1{,}4\,\rho_{0x}(k\rho_{0x})$. Для малых θ_0 $(k\sigma_0 \gg 1)$ получаем $\rho_{0z} = 2\pi\sigma_0\,(k\sigma_0) \approx 2{,}1\cdot\rho_{0x}\,(k\rho_{0x})$. Таким образом, радиус вертикальной корреляции примерно в $k\rho_{0x}$ раз больше, чем горизонтальной. Этот результат справедлив также и для других видов функции корреляции источников $B(\sigma)$.

Заметим, что если $g(\theta)$ есть дельта-функция, т. е. если вся энергия шумового излучения сосредоточена в бесконечно малом интервале углов вокруг $\theta = \theta_0$ (при этом, конечно, должно выполняться равенство $B(0) = \int_0^{\pi/2} g(\theta)\,\sin\theta\,d\theta = 1$), то функции горизонтальной и вертикальной корреляций будут равны соответственно

$$\Gamma_г(\rho) = \int_0^{\pi/2}\delta(\theta - \theta_0)\,I_0(k\rho\sin\theta)\cos\theta\,\sin\theta d\theta = I_0(k\rho\sin\theta_0), \tag{18}$$

$$\Gamma_в(\rho) = \int_0^{\pi/2}\delta(\theta - \theta_0)\cos(k\rho\cos\theta)\cos\theta\,\sin\theta d\theta = \cos(k\rho\cos\theta_0), \tag{19}$$

а радиусы корреляции ρ_{0x} и ρ_{0z} равны бесконечности. Как известно, функция корреляции вида $I_0(k'\rho)$ появляется при рассмотрении изотроп-

ных поверхностных волн, для которых скорость распространения равна $c' = \omega/k'$. При $c' > c$ поверхность излучает энергию по направлениям $\sin\theta_0 = c/c'$, причем случайное поле, излучаемое такими волнами, будет описываться корреляционными функциями (18) и (19). Бесконечная величина радиуса корреляции выражает тот факт, что для вычисления энергетических величин необходимо учитывать волны, приходящие со сколь угодно далеких участков поверхности.

Перейдем теперь к рассмотрению того случая, когда корреляция не сохраняется. Типичным примером такого рода является случай некоррелированных поверхностных источников. Функцию корреляции источников $B(\sigma)$ возьмем снова в виде (15); устремляя σ_0 к нулю в пределе, получим δ-коррелированные источники. (Заметим, что при других аппроксимациях δ-функции результаты получаются такие же). Формула (16) останется справедливой, только теперь граничный угол θ_0 будет находиться в области мнимых углов, а для всех действительных углов $g(\theta)$ будет равна $2(k\sigma_0)^2\cos\theta$. Функции горизонтальной и вертикальной корреляций легко находятся из выражения (12):

$$\Gamma_г(\rho) = 2(k\sigma_0)^2 \int_0^{\pi/2} I_0(k\rho\sin\theta)\cos\theta\sin\theta\, d\theta = (k\sigma_0)^2 \frac{2I_1(k\rho)}{k\rho}, \tag{20}$$

$$\Gamma_в(\rho) = 2(k\sigma_0)^2 \int_0^{\pi/2} \cos(k\rho\cos\theta)\cos\theta\sin\theta\, d\theta = $$
$$= (k\sigma_0)^2 \frac{2(k\rho\sin k\rho + \cos k\rho - 1)}{(k\rho)^2}. \tag{21}$$

Таким образом, при уменьшении радиуса корреляции σ_0 интенсивность излучения уменьшается как $(k\sigma_0)^2$, а нормированные коэффициенты корреляции зависят не от σ_0, а только от безразмерного расстояния $x = k\rho$:

$$\gamma_г = \frac{\Gamma_г(\rho)}{\Gamma(0)} = \frac{2I_1(x)}{x}, \tag{22}$$

$$\gamma_в = \frac{\Gamma_в(\rho)}{\Gamma(0)} = \frac{2(x\sin x + \cos x - 1)}{x^2}. \tag{23}$$

Таким образом, при монохроматическом излучении некоррелированные источники дают коррелированные поля, что уже отмечалось ранее в работах по оптике [10].

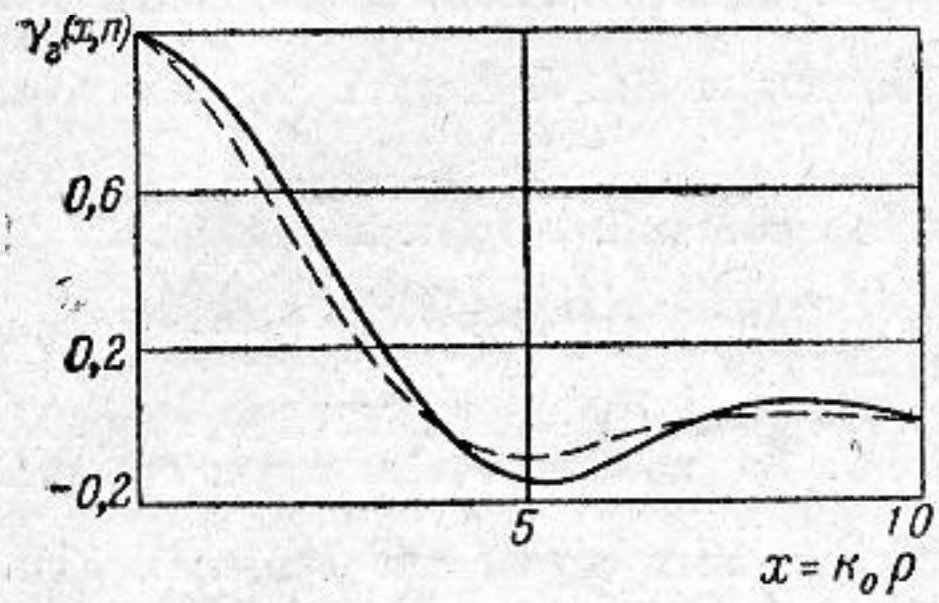
До сих пор мы рассматривали монохроматические случайные источники на плоскости. Если в общем случае на плоскости заданы стационарные по времени и однородные по поверхности шумовые источники, то случайную функцию $\varphi(s, t)$, описывающую эти источники, можно представить в виде трехмерного интеграла Фурье — Стильтьеса. Проводя рассуждения, аналогичные приведенным выше для случая монохроматических источников, мы получим пространственно-временную корреляционную функцию

$$\Gamma(\mathbf{R}, \mathbf{R}', \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} d\omega \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2-i\infty} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{R}-\mathbf{R}')}\, g(\theta, \varphi, \omega)\sin\theta\, d\varphi\, d\theta, \tag{24}$$

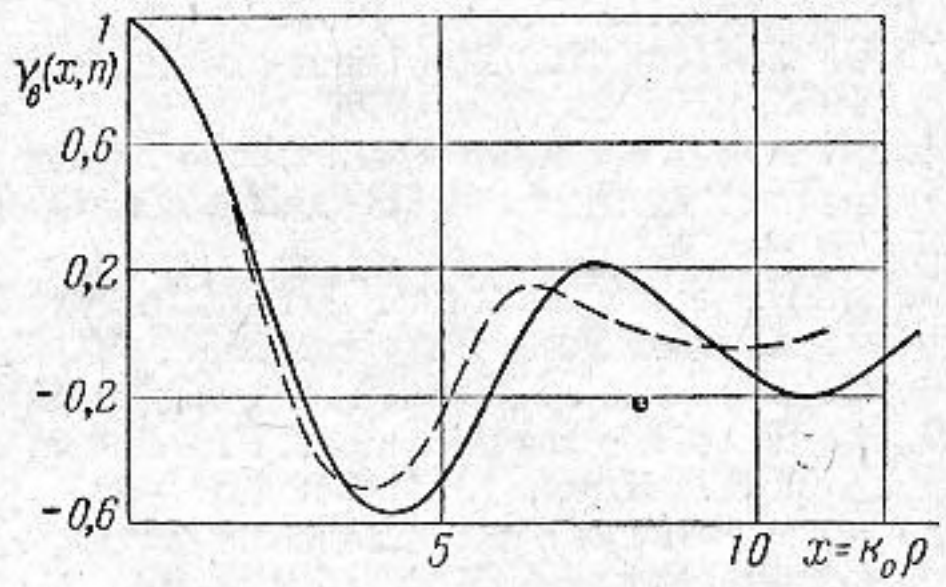
где $g(\theta, \varphi, \omega)$ — плотность энергии в направлении θ, φ на частоте ω. Эта формула не вполне строго была впервые получена в работе [3]. Если для всех частот $g(\theta, \varphi, \omega)$ отлична от нуля только в области действительных углов θ, т. е. при излучении отсутствуют неоднородные волны во всем диапазо-

не рассматриваемых частот, то пространственно-временная корреляционная функция переносится без изменения с поверхности на любую плоскость $z = \text{const}$.

Рассмотрим теперь излучение широкополосных источников δ-коррелированных как по пространству, так и по времени. Такая ситуация может возникать, например, при рассмотрении шумов моря, вызываемых дождем. δ-корреляция по времени означает, что спектральная плотность $g(\theta, \varphi, \omega)$ не зависит от ω. В этом случае пространственная корре-



Фиг. 1



Фиг. 2

ляционная функция, согласно (24), будет $\Gamma(\rho) = \int\limits_0^\infty \Gamma(\rho, \omega)\, d\omega$, где $\Gamma(\rho, \omega)$ определяется из (20) и (21). Ограничимся рассмотрением шума в полосе частот 2Ω вокруг основной частоты ω_0, обозначив $\Omega/\omega_0 = n$. Мощность шума в единичной полосе частот примем равной единице. Опуская промежуточные выкладки, напишем окончательные выражения для функции и коэффициента горизонтальной корреляции

$$\Gamma_г(\rho) = 2\Omega (k_0\sigma_0)^2 \cdot \frac{3 + n^2}{3} \gamma_г(x, n),$$

$$\gamma_г(x, n) = \frac{3\pi}{2n(3 + n^2)} \frac{1}{x^2} \{(1 + n)[J_1(x(1 + n)) S_0(x(1 + n)) -$$

$$- J_0(x(1 + n)) S_1(x(1 + n))] - (1 - n)[J_1(x(1 - n)) S_0(x(1 - n)) -$$

$$- J_0(x(1 - n)) S_1(x(1 - n))]\}. \qquad (25)$$

Здесь J_0 и J_1 — функция Бесселя, а S_0 и S_1 — функция Струве нулевого и первого порядка [11]. Для вертикальной корреляции аналогичные формулы имеют вид:

$$\Gamma_в(\rho) = 2\Omega (k_0\sigma_0)^2 \frac{3 + n^2}{3} \gamma_в(x, n),$$

$$\gamma_в(x, n) = \frac{3}{3 + n^2} \cdot \frac{2}{x^2}\left[x \sin x \frac{\sin nx}{nx} - 1 + \cos x\left(2 \frac{\sin nx}{nx} - \cos nx\right)\right]. \qquad (26)$$

При $n \to 0$ формулы (25) и (26) переходят в формулы (20) и (21).

На фиг. 1 и 2 приведены соответственно графики коэффициентов горизонтальной и вертикальной корреляций для монохроматического излучения (сплошные кривые, $n = 0$) и для шума в октавной полосе (пунктирные кривые, $n = 1/3$) в зависимости от безразмерного расстояния $x = k_0\rho$. Как видно из графиков, несмотря на значительную разницу спектров коэффициенты корреляции при не слишком больших значениях x отличаются мало, так что для δ-коррелированных источников пространствен-

ные радиусы корреляции определяются, грубо говоря, не шириной полосы, а средней частотой шума. При увеличении полосы Ω (для фиксированного n) радиус пространственной корреляции будет безгранично уменьшаться, так что в отличие от монохроматического излучения широкополосные источники могут давать некоррелированные поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. E. Roberson. Random noise in attenuating fluid medium. J. Acoust. Soc. America, 1951, **23**, 3, 353—358
2. С. М. Рытов. Теория электрических флуктуаций и теплового излучения. М., Изд-во АН СССР, 1953.
3. C. Eckart. The theory of noise in continuous media. J. Acoust. Soc. America, 1953, **25**, 2, 195—199.
4. М. А. Исакович. О рассеянии и излучении волн статистически неоднородными и статистически колеблющимися поверхностями. Акуст. ж., 1956, **2**, 2, 146—149.
5. V. C. Anderson, Arrays for the investigation of ambient noise in the ocean. J. Acoust. Soc. America, 1958, 30, 5, 470—477.
6. M. Born, E. Wolf. Principles of optics. Pergamon Press, N. Y. 1959, chap. X.
7. A. Blanc-Lapierre, P. Domonted. La notion de coherence en optique. Rev. d'optique, 1955, **34**, 1, 1—21.
8. А. М. Яглом. Введение в теорию стационарных случайных функций. Усп. матем. наук, 1952, **7**, 5, 1—168.
9. И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов. Обобщенные функции, вып. 1. М., Физматгиз, 1959.
10. G. B. Parrent. Studies in the theory of partial coherence. Opt. Acta, 1959, **6**, 286—296.
11. Е. Янке и Ф. Эмде. Таблица функций. М., Физматгиз, 1959.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
25 марта 1963 г.