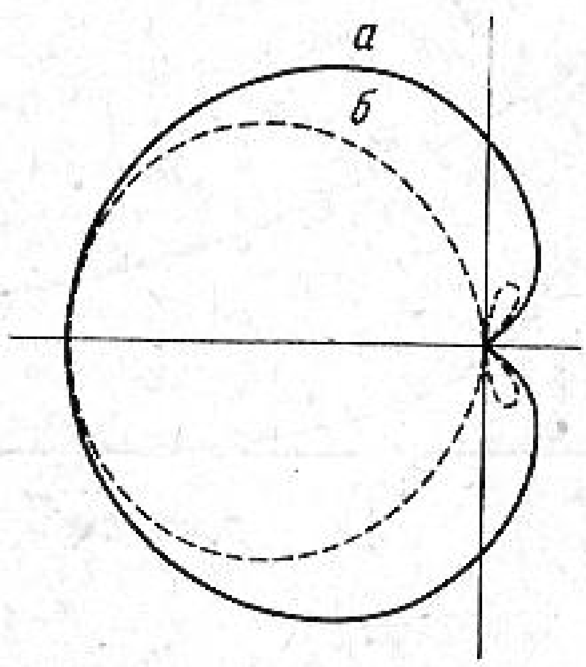
УДК 534.2—16.011

ВОЗБУЖДЕНИЕ НАПРАВЛЕННЫХ ВОЛН ИЗГИБА В ПЛАСТИНАХ

А. С. Никифоров

При совместном воздействии на пластину сосредоточенных изгибающего момента и поперечной силы в пластине возникает направленная волна изгиба. Направленность волны образуется вследствие суперпозиции осесимметричной волны, возбуждаемой поперечной силой, и волны, имеющей направленность, соответствующую закону $\sin\theta$, возбуждаемой изгибающим моментом. Формально эту ситуацию можно рассматривать как суперпозицию волн, излучаемых совмещенными источниками нулевого и первого порядков, где роль излучателя нулевого порядка играет поперечная сила, а излучателя первого порядка — изгибающий момент. Определим, при каком соотношении изгибающего момента M и поперечной силы F направленность возбуждаемой ими бегущей волны изгиба будет максимальной.



Предположим, что изгибающий момент и поперечная сила приложены к малому участку пластины с радиусом a. Согласно [1] смещение пластины, вызванное бегущей волной изгиба, возбуждаемой изгибающим моментом, равно $\xi_M = A_M \sin\theta \cdot H_1^{(1)}(kr)$. Здесь A_M — амплитуда смещения пластины в месте приложения изгибающего момента, θ — угол в системе координат, начало которой совмещено с центром возбуждаемого участка пластины и отсчитываемый относительно оси, перпендикулярной плоскости действия изгибающего момента, $H_1^{(1)}(kr)$ — функция Ханкеля первого рода первого порядка, k — волновое число изгиба в пластине, r — расстояние от центра возбуждаемого участка пластины.

Для упрощения аналитических выкладок ограничимся случаем тонкой пластины, т. е. условием $(kh)^2 \ll 1$ (h — толщина пластины). Практический интерес представляет случай, когда размеры участка, к которому приложены возбуждающие усилия, значительно меньше длины волны изгиба, т. е. когда выполняется условие $ka \ll 1$. При этих условиях амплитуда смещения пластины в месте приложения изгибающего момента будет равна [1]

$$A_M = M\,\frac{\left[2 + k^2a^2\left(\dfrac{SL}{a^2} - \ln ka\right)\right]}{j8kD\,(1+L)}. \tag{1}$$

Здесь

$$S = \frac{2h^2}{\pi^2(1-\sigma)}, \qquad L = \left[1 + \frac{K_1(\pi a/h)}{\dfrac{\pi a}{h}\,K_0(\pi a/h)}\right]^{-1},$$

$K_0(\pi a/h)$, $K_1(\pi a/h)$ — функция Бесселя от мнимого аргумента нулевого и первого порядка, σ — коэффициент Пуассона пластины, D — жесткость пластины на изгиб, равная $D = Eh^3\,[12(1-\sigma^2)]^{-1}$, E — модуль Юнга пластины.

Можно показать, что при $\pi a/h \geqslant 10^{-1}$ мы имеем неравенство $SL/a^2 < 10$. С учетом этого обстоятельства выражение (1) принимает вид:

$$A_M \approx \frac{M}{j4kD(1+L)}.$$

Поперечное смещение пластины, вызванное бегущей волной изгиба, возбужденной поперечной силой F, можно записать в виде $\xi_F = A_F H_0^{(1)}(kr)$, где A_F — амплитуда смещения пластины в месте приложения поперечной силы, равная

$$A_F = \frac{F}{j8\omega\,(Dm)^{1/2}} \tag{2}$$

(m — масса пластины, приходящаяся на единицу поверхности, ω — круговая частота).

Результирующее поперечное смещение пластины, вызванное бегущей волной изгиба, возбужденной в результате совместного действия изгибающего момента и поперечной силы, будет выражаться формулой (при $kr \gg 1$)

$$\xi = \xi_M + \xi_F = (A_M \sin\theta + jA_F)\; e^{-jkr}\,\frac{j-1}{\sqrt{\pi kr}}. \tag{3}$$

Из геометрических соображений очевидно, что максимальная направленность волны изгиба, описываемой формулой (3), будет иметь место при условии равенства нулю смещения пластины при $\theta = -\pi/2$, т. е. когда $A_M = jA_F$.

Подставляя это равенство в выражения для A_M и A_F, мы получим отношение изгибающего момента и поперечной силы, при котором будет наблюдаться максимальная направленность возбуждаемой ими бегущей волны изгиба, в виде

$$\frac{M}{F} = j\,\frac{k(1+L)}{2\omega}\left(\frac{D}{m}\right)^{1/2} = j\,\frac{1+L}{2k}. \tag{4}$$

Если положить, что $\pi a/h \gg 1$, то $L \approx 1$, и, следовательно, выражение (4) примет вид:

$$F \approx -j\,kM. \tag{5}$$

Используя равенство $A_M = j\,A_F$, на основании формулы (3) получаем

$$\xi = A_F\,R_1(\theta)\;e^{-jkr}\,\frac{1+j}{\sqrt{\pi kr}},$$

где $R_1(\theta)$ — коэффициент направленности бегущей волны изгиба, равный $R_1(\theta) = 1 - \sin\theta$ и соответствующий кардиоиде.

Характеристика направленности волны изгиба может быть сделана более острой, если пластину возбуждать двумя идентичными синфазно работающими возбудителями описанного выше типа, расположенными на расстоянии π/k в плоскости, перпендикулярной плоскости действия изгибающего момента. Коэффициент направленности волны изгиба, возбужденной таким способом, на расстоянии, значительно превышающем π/k, будет равен $R_2(\theta) = (1-\sin\theta)\sin(\pi/2\sin\theta)$. Графическое изображение характеристик направленности одиночного *а* и двойного *б* возбудителей приведены на фигуре.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Dyer. Moment impedance of plates. J. Acoust. Soc. America, 1960, **32**, 10, 1291—1297.

Ленинград

Поступило в редакцию
15 октября 1962 г.

УДК 543.232

О РАСЧЕТЕ РЕЗОНАНСНЫХ ЧАСТОТ СТУПЕНЧАТОГО КОНЦЕНТРАТОРА

И. И. Теумин

Для расчета резонансных частот ступенчатого концентратора часто приводится выражение [1], [2]:

$$S_1 \operatorname{tg} \alpha l_1 + S_2 \operatorname{tg} \alpha l_2 = 0, \tag{1}$$

где S_1, S_2, l_1 и l_2 — площади поперечных сечений и соответственные длины звеньев концентратора, изготовленных из одинаковых материалов, т. е. с одинаковыми волновыми сопротивлениями и волновыми множителями: $\alpha = \omega/v$.

Однако выражение (1) не обладает общностью. Действительно, в любом из следующих случаев: а) при $S_1 = S_2 = S$ или б) при $l_1 = l_2 = l$ расчеты по формуле (1) дают существенно неправильные результаты. Предварительно убедимся, что более общая формула [3], справедливая для случая однородного волновода, нагруженного на реактивное сопротивление любого вида (и в том числе, в виде второго звена), не обладает указанной ограниченностью и в случаях а и б дает правильные результаты.

Эта формула применительно к рассматриваемому концентратору имеет вид:

$$\operatorname{tg}(\alpha l_1 + \varphi_2) = 0, \tag{2}$$

где

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{S_2}{S_1}\operatorname{tg}\alpha l_2, \tag{3}$$

В случае $S_1 = S_2$ на основании формулы (3) $\varphi_1 = \alpha l_2$ и, следовательно,

$$\operatorname{tg}(\alpha l_1 + \alpha_2) = 0, \tag{4}$$

или для основной частоты $\alpha l_1 + \alpha l_2 = \pi$, откуда собственная длина волны будет $\lambda = l_0/2$, где $l_0 = l_1 + l_2$ — полная длина концентратора. Этот тривиальный результат соответствует концентратору, вырожденному в однородный волновод длиной l_0 и справедливость его является очевидной. Перейдем к случаю $l_1 = l_2 = l$. Учитывая