АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том IX 1963 Вып. 1

СФЕРИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В ВЯЗКОЙ ТЕПЛОПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

К. А. Наугольных, С. И. Солуян, Р. В. Хохлов

Рассмотрены процессы распространения расходящихся и сходящихся сферических волн в нелинейной вязкой и теплопроводящей среде. Рассмотрение проведено приближенным методом, в основу которого положено предположение о малости $1/kr$ (k — волновое число, r — радиус сферы), нелинейности среды и поглощения энергии в ней. На основе полученных решений исследованы явления формирования и «рассасывания» фронтов, определены пространственные масштабы этих явлений. Показано, что задача о распространении сферических волн в принятом приближении эквивалентна задаче о распространении плоских волн в среде с экспоненциально меняющейся вязкостью.

1. Задача о распространении сферических волн конечной амплитуды, излучаемых гармонически пульсирующей сферой, рассматривалась ранее (см., например, [1, 2]). Однако полученные в этих работах решения носят приближенный характер. Они описывают процесс нелинейного искажения формы таких волн при их распространении как процесс постепенного нарастания высокочастотных компонент в первоначально монохроматической волне, причем обычно вычисляется только несколько первых гармоник. Такие решения, удовлетворительно описывая поведение волны вблизи излучателя, становятся непригодными на больших расстояниях от него в тех случаях, когда там образуется волна пилообразной формы.

Полученное в настоящей работе решение свободно от этого ограничения; оно дает качественную и приближенную количественную картины распространения сферической волны конечной амплитуды как вблизи излучателя, так и на больших расстояниях от последнего, в области, где сформировалась периодическая ударная волна. При этом, однако, предполагается, что размеры излучателя велики по сравнению с длиной волны, т. е. всегда выполняется условие $kr \gg 1$.

2. Предполагая движение сферически симметричным, запишем исходную систему уравнений следующим образом: уравнение движения —

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\,\frac{\partial v}{\partial r}\right) = \rho - \frac{\partial p}{\partial r} + b\left[\frac{1}{r}\,\frac{\partial^2 (rv)}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2}\,v\right], \qquad (1)$$

уравнение непрерывности —

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v\,\frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho\,\frac{\partial v}{\partial r} + 2\,\frac{\rho v}{r} = 0 \qquad (2)$$

и приближенное уравнение состояния среды —

$$p = p_0 + c^2(\rho - \rho_0) + \frac{\gamma - 1}{2}\,\frac{\rho_0}{c_0^2}(\rho - \rho_0)^2. \qquad (3)$$

Здесь v — скорость среды, ρ — плотность, p — давление, r — сферическая координата, c — скорость звука, $b = {}^4/_3\,\eta + \xi + \varkappa\left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p}\right)$, η, ξ — коэффициенты сдвиговой и объемной вязкостей, $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности. В случае газов $\gamma = c_p/c_v$, где c_p и c_v — удельные теп-

лоемкости, а в случае жидкостей $\gamma = \left(\frac{\partial c^2}{\partial \rho}\right) \frac{\rho_0}{c_0^2} + 1$. Индексом 0 обозначены равновесные значения величин. Присутствие коэффициента теплопроводности в выражении для b обусловлено объединением членов с вязкостью в уравнении Навье — Стокса с так называемыми тепловыми членами уравнения состояния, учитывающими неадиабатичность процесса. Такое объединение возможно при условии малости поглощения на длине волны [2].

Для преобразования системы уравнений (1), (2), (3) удобно ввести тепловую функцию $w = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho}$, так что

$$\frac{dw}{d\rho} = \frac{1}{\rho}, \quad \frac{dw}{dr} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} \text{ и так далее.} \tag{4}$$

При этом, как нетрудно установить при помощи формулы (3),

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = c^2 = c_0^2 + (\gamma - 1) w. \tag{5}$$

Принимая во внимание равенство $\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial r} = \frac{\rho}{c^2}\left[\frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial r}\right]$, полученное при помощи формулы (4), перепишем уравнение непрерывности в виде $\frac{\partial w}{\partial t} + v \frac{\partial w}{\partial r} + c^2 \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{2c^2}{r} v = 0.$

Это уравнение после введения потенциала φ путем замены $v = \partial\varphi / \partial r$ можно представить следующим образом:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial r} + c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{2c^2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0. \tag{6}$$

С другой стороны, из уравнения (1) мы получим приближенно, удерживая лишь максимальные по kr (k — волновое число; предполагается, что $kr \gg 1$) величины в вязком члене, следующее выражение для w:

$$w = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)^2 + \frac{b}{\rho_0} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}. \tag{7}$$

Подставляя теперь выражение (7) в уравнение (6) и учитывая соотношение (5), мы получим с точностью до квадратичных по амплитуде величин

$$c_0^2 \varphi'' - \ddot{\varphi} + \frac{b}{\rho_0} \dot{\varphi}'' + c_0 (\gamma + 1) \varphi' \varphi'' + \frac{2c_0^2}{r} \varphi' = 0.$$

Следуя работе [3], перейдем теперь от переменных r, t к переменным $\tau = t - r / c_0$ и $r' = \mu r$, где μ — малый параметр. Введением координаты r' учитывается медленное изменение формы волны при ее распространении в среде*. Тогда, удерживая лишь линейные и квадратичные члены, получим

$$-2\mu c_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \tau} + \frac{b}{\rho_0 c_0^2} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \tau^3} - \frac{(\gamma + 1)}{c_0^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} - \frac{2c_0}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \frac{2c_0^2 \mu}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0.$$

Возвращаясь к $v = \partial\varphi / \partial r = -\frac{1}{c_0} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial r}$, мы получим в рассматриваемом приближении

$$\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} - \alpha v \frac{\partial v}{\partial t} = \delta \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2}, \tag{8}$$

где $\alpha = (\gamma + 1) / 2c_0^2$, $\delta = b / 2\rho_0 c_0^3$.

---

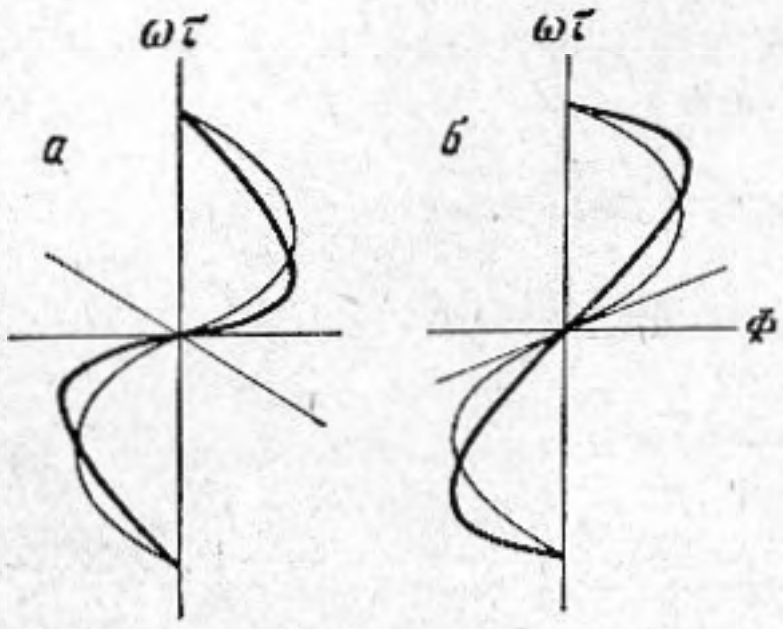
* Ниже всюду штрих над r опущен.

Заметим, что уравнение (8) применимо и для сходящейся сферической волны (при этом $\tau = t + r/c_0$).

Предполагая заданным на поверхности пульсирующей сферы ($r = r_0$) граничное условие $v = v_0 \sin(\omega t - kr_0)$, перепишем последнее в новых координатах τ и r:

$$\text{при } r = r_0 \quad v = v_0 \sin \omega\tau. \tag{9}$$

Теперь задача состоит в отыскании периодического по τ при любом значении r решения уравнения (8) с граничным условием (9), описывающего бегущие расходящиеся и сходящиеся сферические волны.



Фиг. 1

3. В случае больших чисел Рейнольдса

$$R = \alpha v_0 / 2\omega\delta \approx \alpha v v_\tau / \delta v_{\tau\tau} \gg 1 \tag{10}$$

на первом этапе распространения звуковой волны конечной амплитуды диссипативные процессы не играют существенной роли и членом $\delta v_{\tau\tau}$, стоящим в правой части уравнения (8), можно пренебречь. Тогда решение уравнения (8) с граничным условием (9) имеет вид:

$$\omega\tau = \arcsin \Phi - \alpha\omega v_0 r_0 \ln(r/r_0)\,\Phi, \tag{11}$$

где $\Phi = vr / v_0 r_0$.

Решение (11) может быть проанализировано графически. Отложив по оси абсцисс значение Φ, а по оси ординат значение $\omega\tau$, легко видеть, что волновой профиль, представляемый в соответствии с решением (11) как сумма двух функций — арксинуса и линейной функции с угловым коэффициентом $X = \alpha\omega v_0 r_0 |\ln(r/r_0)|$, искажается по мере распространения волны (фиг. 1, *а* и *б*).

Различие между сходящейся и расходящейся сферическими волнами здесь не носит принципиального характера. В обоих случаях искажения волнового профиля определяются значением одного и того же коэффициента X, так что при $X < 1$ искажения слабые, при X сравнимом с единицей — сильные, а при $X > 1$ функция $\Phi(\tau)$ становится многозначной. В последнем случае решение (11) не справедливо. Функцию $\Phi(\tau)$ без учета диссипативных процессов следует считать разрывной, а координата формирования разрыва может быть определена из условия $X = 1$, что дает

$$kr_1 = kr_0 \exp\{1 / kr_0 M^*\}$$

для расходящейся сферической волны, (12)

$$kr_1 = kr_0 \exp\{-1 / kr_0 M^*\} \tag{13}$$

для сходящейся сферической волны, где $M^* = (\gamma + 1) v_0 / 2c_0$ — акустический аналог числа Маха. Для дальнейшего, вместо координаты r удобно ввести пропорциональную ей координату $Z = \alpha\omega v_0 r$. Тогда безразмерная координата формирования разрыва $z_1 = \alpha\omega v_0 r_1$ определится формулами:

$$Z_1 = Z_0 \exp\{1 / Z_0\} \tag{14}$$

для расходящейся сферической волны,

$$Z_1 = Z_0 \exp\{-1 / Z_0\} \tag{15}$$

для сходящейся сферической волны, где $Z_0 = \omega\alpha v_0 r_0$.

Легко видеть, что в случае расходящихся сферических волн при уменьшении параметра Z_0, пропорционального первоначальному радиусу r_0, Z_1 растет, так что, например, $Z_1 - Z_0$ при $Z_0 = {}^1/_3$ больше, чем $Z_1 - Z_0$ при $Z_0 = 3$. В случае сходящейся сферической волны, наоборот, $Z_0 - Z_1$ при $Z_0 = {}^1/_3$ меньше, чем $Z_0 - Z_1$ при $Z_0 = 3$, т. е. при уменьшении радиуса пульсирующей сферы в случае сходящихся сферических волн нелинейные эффекты проявляются сильнее. Подчеркнем еще раз, что для применимости решения (11) на участке от Z_0 до Z_1 необходимо, чтобы на всем этом участке выполнялось соотношение $\alpha v v_\tau / \delta v_{\tau\tau} \gg 1$ (10).

Формулы (12) — (13) при стремлении r_0 к бесконечности переходят в обычное соотношение для плоских волн

$$k | r_1 - r_0 | = 1 / M^* \text{ (Ср. [3])}.$$

4. Для исследования структуры образующихся разрывов целесообразно рассмотреть вспомогательную задачу о распространении одиночного скачка уплотнения в среде. Производя в уравнении (8) замену функции v и независимой переменной r в соответствии с формулами

$$U = vr / r_0 \text{ и } x = \ln (r / r_0) \tag{16}$$

нетрудно получить

$$\frac{\partial U}{\partial x} - \alpha r_0 U \frac{\partial U}{\partial \tau} = \delta r_0 \exp \{x\} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} . \tag{17}$$

Граничные и начальные условия для задачи о распространении одиночного скачка уплотнения в переменных U, x, τ можно сформулировать следующим образом:

$$U (x, -\infty) = U_0, \quad U (x, +\infty) = -U_0, \tag{18}$$

$$U (\mp \infty, \tau) = \{+U_0 \text{ при } \tau_0 < 0 \text{ и } -U_0 \text{ при } \tau > 0\}. \tag{19}$$

Решение задачи (17), (18), (19) может быть получено путем численного интегрирования. Мы ограничимся рассмотрением приближенного квазистационарного решения.

В области, где выполняется условие $\partial U / \partial x \ll \alpha r_0 U^{dU} / \partial \tau$, можно записать квазистационарное решение задачи (17), (18), (19) в виде

$$U = U_0 \operatorname{th} (\alpha U_0 \tau / 2\delta \exp \{x\}). \tag{20}$$

Нетрудно показать, что это решение справедливо при выполнении условия

$$r_0 (\alpha U_0)^2 / 2\delta \exp \{x\} \gg 1, \tag{21}$$

а при стремлении r_0 к бесконечности — справедливо всегда и переходит в стационарное решение для одиночного плоского разрыва.

Умножив числитель и знаменатель неравенства (21) на ω, перепишем последнее в терминах введенной ранее безразмерной координаты $Z = \alpha \omega v_0 r$

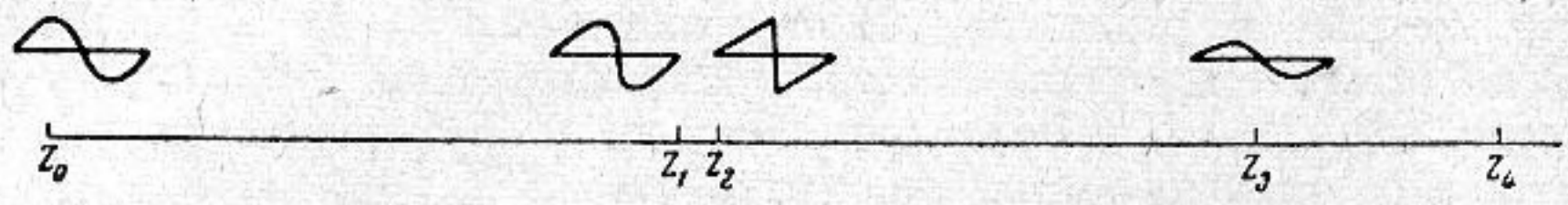
$$Z_0 \operatorname{Re} \gg Z / Z_0. \tag{22}$$

Если соотношение (22) выполняется в точке r_0, то для сходящейся сферической волны оно будет выполняться всюду. Для расходящейся сферической волны на некоторых расстояниях Z_4 оно перестает быть справедливым. Определяя это расстояние из условия

$$Z_4 \simeq Z_0^2 \operatorname{Re}, \tag{23}$$

легко видеть, что в практически наиболее интересном случае больших чисел Рейнольдса и не малых значений Z_0 пределы применимости квазистационарного решения достаточно широки и для расходящихся сферических волн.

5. Возвращаясь к задаче о распространении первоначально гармонической волны конечной амплитуды, заданной в точке r_0 соотношением (9), напомним, что в соответствии с решением (11) на участке от Z_0 до Z_1 (см. схему на фиг. 2) происходит искажение формы этой волны, приводящее к образованию периодической ударной волны в точке Z_1, если только на всем этом участке выполняется соотношение (10). На еще больших расстояниях



Фиг. 2

$Z \geqslant Z_2 > Z_1$ (Z_2 определяется из условия $X = \pi/2$) периодическая ударная волна принимает пилообразную форму, причем ее пиковое значение U убывает, как это можно установить из формулы (11), по закону

$$U = U_0 / (1 + Z_0 |\ln r / r_0|). \tag{24}$$

Если в области $Z \geqslant Z_2 \simeq Z_1$ выполняется условие применимости квазистационарного решения (22), то структуру разрывов, образовавшихся в пилообразной волне, можно описать на основе решения (20) с учетом того, что «амплитуда разрывов» затухает в соответствии с (24). Тогда в пределах одного периода $-\pi \leqslant \omega\tau \leqslant \pi$ конфигурация волны приближенно описывается соотношением

$$vr = \frac{v_0 r_0}{1 + Z_0 |\ln r/r_0|} \left(-\omega\tau + \pi \operatorname{th} \frac{\omega\tau}{\Delta} \right), \tag{25}$$

где величина

$$\Delta = \frac{1 + Z_0 |\ln r / r_0|}{\pi \operatorname{Re}} \left(\frac{r}{r_0} \right) \tag{26}$$

есть безразмерная ширина фронта. Для получения полной картины распространения волны решение (25) должно быть периодически повторено.

В том, что выражение (25) является решением уравнения (8) можно также убедиться путем непосредственной подстановки. Уравнение (8) при этом удовлетворяется приближенно, а необходимое условие приближенного соблюдения уравнения (8) в точности совпадает с условием применимости квазистационарного решения (22).

Анализируя соотношение (26), определяющее ширину фронта сферической ударной волны, легко видеть, что она не остается стационарной по двум причинам. Во-первых, происходит «рассасывание» фронта ударной волны, обусловленное уменьшением ее амплитуды из-за поглощения, так что Δ растет пропорционально $|\ln r/r_0|$. Этот механизм рассасывания полностью аналогичен соответствующему механизму, действующему в случае плоских волн (где вместо логарифмической зависимости от координаты r имеет место линейная зависимость); он проявляется одинаково как в случае расходящейся, так и в случае сходящейся сферических волн.

Во-вторых, и главным образом Δ не остается постоянной из-за наличия в формуле (26) множителя (r/r_0), действующего различно в случае расходящейся $(r/r_0) > 1$ и сходящейся $(r/r_0) < 1$ сферических волн.

Теперь целесообразно порознь рассмотреть картины распространения расходящихся и сходящихся сферических волн во всей области от точки Z_0, используя полученные решения (11), (25), (26) вместе с условиями применимости их (10) и (22), (23).

6. Возмущение скорости, заданное в точке r_0 соотношением (9) в случае расходящейся сферической волны в соответствии с (11) в точке Z_1 становится «разрывным», а в точке $Z_2 \simeq Z_1$ имеет пилообразный профиль.

В области $Z \geqslant Z_2$ конфигурация волны определяется формулами (25) и (26) при условии применимости последних (23). На участке $Z > Z_2$ происходит интенсивное «рассасывание» фронта волны, особенно из-за расходимости, пропорциональной (r/r_0) так, что в некоторой точке Z_3 безразмерная ширина фронта Δ может занять фазовый интервал порядка π. В этом случае рассмотрение структуры фронта, вообще, физически неоправдано. В точке Z_3 волна пилообразной формы превращается в синусоидальную, причем амплитуда этой синусоиды в точке Z_3 имеет порядок v_0/Re и при условии больших чисел Рейнольдса (10) является малой величиной второго порядка малости. Это означает, что в области $Z \geqslant Z_3$ применимы формулы обычной линейной акустики. Определяя Z_3 из условия $\Delta \simeq \pi$, получим

$$Z_3 \ln (Z_3 / Z_0) \simeq \pi^2 \mathrm{Re}. \qquad (27)$$

Рассмотренная схема процесса справедлива лишь при условии $Z_4 > Z_3$, когда квазистационарное решение справедливо во всей области $Z_3 - Z_0$, а это возможно, как следует из сопоставления формул (23) и (27), при выполнении условия $Z_4 / Z_3 \ln (Z_3 / Z_0) = Z_0^2 / \pi^2 > 1$.

Пусть схема на фиг. 2 построена для случая $Z_0 \gg 1$. Тогда при стремлении Z_0 к единице точка Z_1 стремится вправо, т. е. расстояние $Z_1 - Z_0$ растет, а точка Z_4 стремится влево к точке Z_3, т. е. область применимости квазистационарного решения сужается. При дальнейшем уменьшении Z_0 $(Z_0 < 1)$ точка Z_1 по-прежнему стремится вправо, удаляясь от источника излучения, а точка Z_4, стремясь по-прежнему влево, перескакивает через точку Z_3, так что последняя остается за областью применимости квазистационарного решения и рассмотрение Z_3 неправомерно. Наконец, точки Z_1 и Z_4, сближаясь, обмениваются местами. Это происходит, как следует из сопоставления соотношений (14) и (23), при условии $(1/Z_0) \exp \{1/Z_0\} > \mathrm{Re}$. Однако нельзя утверждать, что и в этом последнем случае в точке Z_1 формируется ударная волна, так как происходит существенное нарушение условия (10), при выполнении которого справедливо решение (11). Заметим еще, что при уменьшении Z_0 минимальная ширина фронта ударной волны, достигаемая в точке $Z_2 \simeq Z_1$, быстро нарастает и, например, при $Z_0 = 1/\ln \mathrm{Re}$, когда еще Z_1 находится ближе к Z_0, чем Z_4, $\Delta_{\min} = 2/\pi$.

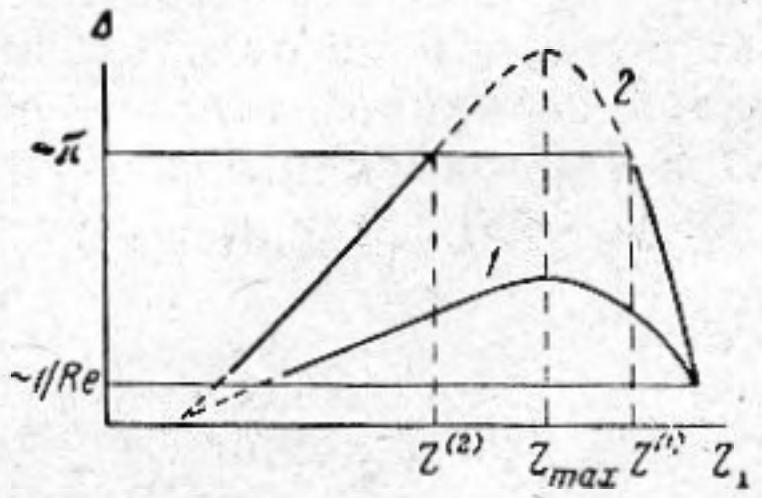
Таким образом, в случае расходящейся сферической волны, если ударные волны и формируются (при $Z > 1$), то ширина их фронтов быстро нарастает главным образом за счет расходимости. При уменьшении Z_0 расходимость и поглощение приводят к тому, что волна поглощается прежде, чем нелинейные искажения приведут к формированию «разрывов».

7. В случае сходящейся сферической волны параметры $Z_0 |\ln r/r_0|$ и (r/r_0) влияют различно, так что безразмерная ширина фронта Δ как функция Z может быть представлена графически кривой (фиг. 3, кривая *1*), ход которой показывает, что ширина сформировавшегося «разрыва» сначала несколько возрастает, достигая максимума в точке $Z_{\max} = Z_0 \exp \{-(1 + Z_0)/Z_0\}$, а затем убывает, стремясь к нулю. Точка $Z_{\max}$ расположена левее точки Z_1, так что всегда $Z_{\max} = Z_1/e$. Максимально достигаемая ширина фронта определяется значением параметра Z_0. При Z_0, стремящемся по порядку величины к величине числа Рейнольдса, $\Delta_{\max} = 0{,}1$. Значение $\Delta_{\max}$ в этом случае существенно отличается от значения $\Delta_1 = 1/\mathrm{Re}$ в точке $Z_1 \simeq Z_2$. При уменьшении параметра Z_0 максимальное значение безразмерной ширины фронта все меньше и меньше отличается от значения Δ_1 в точке $Z_1 \simeq Z_2$. При этом согласно (26) ширина фронта в точке Z_2 при $Z_0 < 1$ гораздо меньше, чем ширина фронта в этой точке при $Z_0 \sim \mathrm{Re}$.

Проведенные рассуждения для сходящейся сферической волны справедливы в соответствии с условием применимости квазистационарного

решения (23) вплоть до значений $Z_0 = 1/\mathrm{Re}$. При этом $\Delta_{max} - \Delta_1 \simeq \simeq 1/\pi\,\mathrm{Re}^2$.

Особый интерес представляет случай таких больших значений $Z_0 \gg \mathrm{Re}$, когда максимальная безразмерная ширина фронта Δ_{max} в соответствии с формулой (26) формально больше или равна π. Пусть $\Delta_{max} > \pi$. Тогда на кривой $\Delta = \Delta(Z)$ (фиг. 3, кривая *2*) имеются две точки $Z^{(1)}$ и $Z^{(2)}$, соответствующие значению $\Delta \simeq \pi$, так что при $Z > Z^{(1)}$ $\Delta < \pi$ и при $Z < Z^{(2)}$ $\Delta < \pi$. Формула (26) справедлива лишь в пределах $\Delta \leqslant \pi$, так что кривая *2* не имеет физического смысла в области $(Z^{(1)} - Z^{(2)})$. В точке $Z^{(1)}$ амплитуда волны оказывается порядка v_0/Re, так что в области $Z^{(1)} - Z^{(2)}$ распространение сходящейся сферической волны может быть описано формулами линейной акустики, пока увеличение амплитуды волны вследствие сходимости не превысит падения амплитуды вследствие диссипации. Это происходит в области $Z \leqslant Z^{(2)}$. Начиная с точки $Z^{(2)}$ формула (26) вновь применима; ширина фронта сходящейся сферической волны, быстро уменьшаясь, стремится к нулю.



Фиг. 3

Таким образом, в случае сходящейся сферической волны ударные волны формируются всегда, причем и при наличии диссипации ширина фронта последних стремится к нулю.

В заключение укажем, что в терминах уравнения (17) задача о распространении расходящейся сферической волны эквивалентна задаче о распространении плоских волн в среде с экспоненциально нарастающей вязкостью, а задача о распространении сходящейся сферической волны эквивалентна задаче о распространении плоских волн в среде с экспоненциально убывающей вязкостью.

ЛИТЕРАТУРА

1. N. M. McLachlan, A. L. Meyers. Sphirical sound waves of finite amplitude. Proc. Phys. Soc., 1935, 47, 644—656.
2. К. А. Наугольных. Распространение сферических звуковых волн конечной амплитуды в вязкой теплопроводящей среде. Акуст. ж., 1959, 5, 1, 80—84.
3. С. И. Солуян, Р. В. Хохлов. Распространение акустических волн конечной амплитуды в диссипативной среде. Вестн. МГУ, 1961, 3, 52—61.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
11 декабря 1961 г.