

РАССЕЯНИЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА ПИЛООБРАЗНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

А. Д. Лапин

Рассмотрена задача о рассеянии плоской волны на пилообразной поверхности, имеющей прямоугольные зубцы. Рассеянное поле над неровной поверхностью ищется в виде суперпозиции брэгговских спектров. Для амплитуд этих спектров получена бесконечная система алгебраических уравнений, которая решена численно редуцированным методом при некоторых значениях параметров.

В работе [1] было получено решение задачи о рассеянии плоской волны на жесткой или мягкой пилообразной поверхности в предположении, что угол падения этой волны принимает некоторые дискретные значения. В настоящей работе получено обобщение этого решения на случай произвольного угла падения (фиг. 1). Зададим давление в падающей волне в виде

$$p_0(x, y) = \exp [i (\kappa_0 x + \xi_0 y)],$$

где  $\kappa_0 = \sqrt{k^2 - \xi_0^2}$ . Рассеянное поле  $p$  при  $x < 0$  будем искать в виде суперпозиции брэгговских спектров:

$$p(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \exp [i (-\kappa_n x + \xi_n y)],$$

где  $\xi_n = \xi_0 + q_n$ ,  $\kappa_n = \sqrt{k^2 - \xi_n^2}$ ,  $q_n = n\pi/a$ . Для нахождения амплитуд  $R_n$  применим метод «сшивания» полей на границах специально выбираемых прямоугольных областей, в которых собственные функции известны.

Путем замены переменной  $y = 2a + z$  можно показать, что при  $x < 0$  поле  $P = p_0 + p$  в точках  $(x, y)$  и  $(x, y + 2a)$  отличается лишь постоянным фазовым множителем  $\exp(i2a\xi_0)$ . Такую же структуру должно иметь и полное поле  $\Phi$  при  $x > 0$ . Это свойство полей  $P$  и  $\Phi$  позволяет все дальнейшие вычисления выполнять лишь в интервале  $-a < y < a$ .

Представим  $P$  и  $\Phi$  в виде суммы симметричного и несимметричного полей:  $P = P_c + P_n$ ,  $\Phi = \Phi_c + \Phi_n$ . Из требования непрерывности при  $x = 0$  давления и нормальной скорости имеем следующие граничные условия:

$$\left(\frac{\partial \Phi_c}{\partial x}\right)_{x=0} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i\kappa_n (\delta_{n,0} - R_n) \cos(\xi_n y), \tag{1}$$

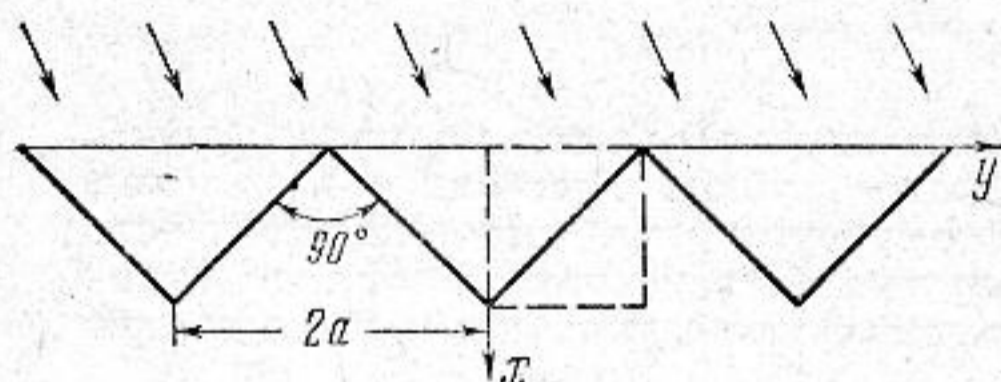
$$(\Phi_c)_{x=0} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\delta_{n,0} + R_n) \cos(\xi_n y), \tag{2}$$

где

$$\delta_{n,0} = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0 \\ 0 & \text{при } n \neq 0 \end{cases}$$

Соответственные граничные условия для  $\Phi_H$  получаются из выражения (1) и (2) заменой  $\cos(\xi_n y)$  на  $i \sin(\xi_n y)$ .

Найдем поле  $\Phi_c$ . Из свойства четности этого поля следует, что при  $y = 0$  можно поставить жесткую перегородку и ограничиться рассмотрением интервала  $0 < y < a$ . Удовлетворим вначале граничному условию (1) и соответственным граничным условиям при  $y = 0$  и при  $y = a - x$ . Из симметрии видно, что все эти условия будут автоматически удовлетворены полем, создаваемым в квадрате с жесткими стенками, обозначенном пунктиром на фиг. 1, источниками объемной скорости



Фиг. 1

$$f(y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i\kappa_n (\delta_{n,0} - R_n) \cos(\xi_n y)$$

и

$$f(x) = \pm \sum_{n=-\infty}^{\infty} i\kappa_n (\delta_{n,0} - R_n) \cos[\xi_n (a - x)],$$

распределенными соответственно по стенкам  $x = 0$  и  $y = a$ . Здесь и далее верхний знак соответствует жесткой поверхности, нижний знак — мягкой поверхности. Используя метод Фурье, получим, что искомое поле можно представить в виде

$$\Phi_c(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2i\kappa_n \beta_{n,m} (\delta_{n,0} - R_n)}{a\theta_m \zeta_m \sin(\zeta_m a)} \{ (-1)^m \cos[\zeta_m (a - x)] \cos(q_m y) \pm \pm \cos(q_m x) \cos(\zeta_m y) \}, \quad (3)$$

где

$$\beta_{n,m} = \begin{cases} (-1)^m \theta_m a / 2 & \text{при } |\xi_n| = q_m \\ \frac{\xi_n \sin(\xi_n a)}{(\xi_n^2 - q_m^2)} & \text{при } |\xi_n| \neq q_m \end{cases}; \quad \theta_m = \begin{cases} 2 & \text{при } m = 0 \\ 1 & \text{при } m \neq 0 \end{cases};$$

$$\zeta_m = \sqrt{k^2 - q_m^2}$$

Удовлетворим теперь граничному условию (2). Это можно сделать, подбирая соответственным образом коэффициенты  $R_n$ . Подставим выражение (3) в формулу (2), умножим обе части полученного соотношения на  $\cos(q_l y)$  и проинтегрируем по  $y$  от 0 до  $a$ . Тогда мы получим бесконечную систему алгебраических уравнений для  $R_n$ :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \beta_{n,l} [\kappa_n / \zeta_l \operatorname{ctg}(\zeta_l a) - i] \pm \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2\kappa_n \alpha_{m,l} \beta_{n,m}}{a\theta_m \zeta_m \sin(\zeta_m a)} \right\} R_n =$$

$$= \left\{ \beta_{0,l} [\kappa_0 / \zeta_l \operatorname{ctg}(\zeta_l a) + i] \pm \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2\kappa_0 \alpha_{m,l} \beta_{0,m}}{a\theta_m \zeta_m \sin(\zeta_m a)} \right\},$$

$$\text{где } \alpha_{m,l} = \begin{cases} (-1)^l \theta_l a / 2 & \text{при } \zeta_m = q_l \\ \frac{\zeta_m \sin(\zeta_m a)}{(\zeta_m^2 - q_l^2)} & \text{при } \zeta_m \neq q_l. \end{cases}$$

Аналогичным способом вычисляется и поле  $\Phi_H$ . Это поле имеет вид:

$$\Phi_H(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2i\vartheta_{n,m}(\delta_{n,0} + R_n)}{a \sin(\zeta_m a)} \{(-1)^m \sin[\zeta_m(a-x)] \sin(q_m y) \mp \mp \sin(q_m x) \sin(\zeta_m y)\},$$

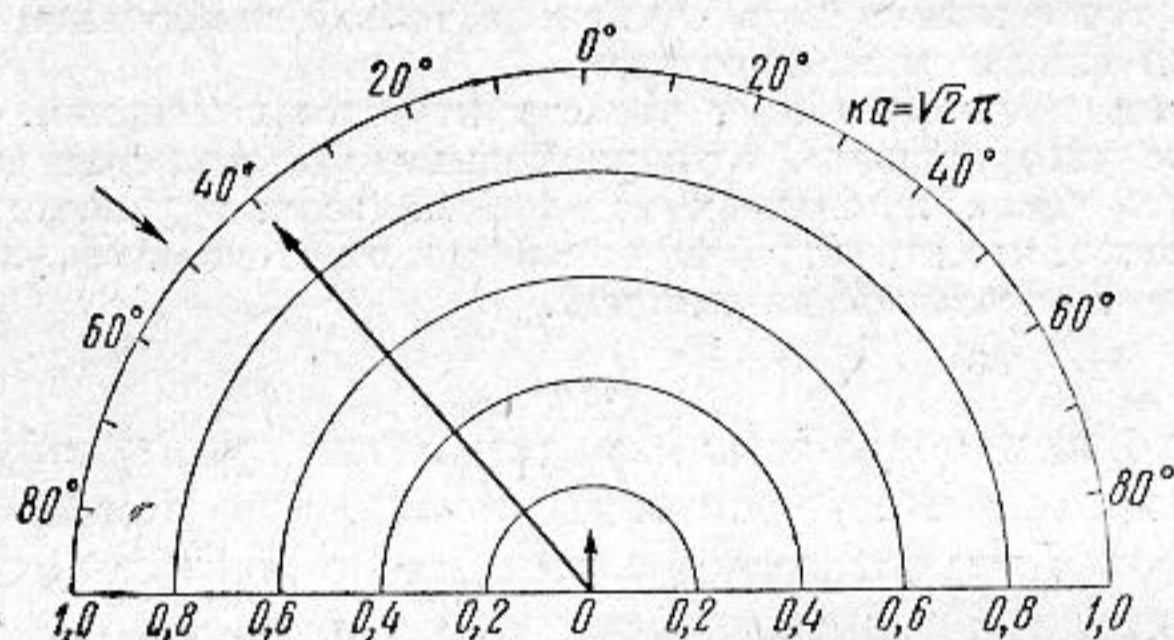
где  $R_n$  — решения бесконечной системы алгебраических уравнений

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \vartheta_{n,l} [\zeta_l \operatorname{ctg}(\zeta_l a) - i\kappa_n] \pm \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2q_m \mu_{m,l} \vartheta_{n,m}}{a \sin(\zeta_m a)} \right\} R_n =$$

$$= - \left\{ \vartheta_{0,l} [\zeta_l \operatorname{ctg}(\zeta_l a) + i\kappa_0] \pm \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2q_m \mu_{m,l} \vartheta_{0,m}}{a \sin(\zeta_m a)} \right\}.$$

Здесь введены обозначения:  $\mu_{m,l} = q_l / \zeta_m \alpha_{m,l}$ ;  $\vartheta_{n,m} = q_m / \xi_n \beta_{n,m}$ .

В общем случае коэффициенты алгебраических уравнений выражаются бесконечными рядами. Лишь в некоторых частных случаях,



Фиг. 2

а именно при  $\xi_0 = r\pi/a$ , где  $r$  — целое число, эти ряды вырождаются в одночленные формулы. Эти частные случаи были рассмотрены ранее в работе [1].

Решения бесконечных систем алгебраических уравнений для амплитуд рассеянных спектров удобно искать численно редукционным методом [2]. На фиг. 2 представлены амплитуды спектров рассеянного поля, рассчитанные указанным способом для жесткой неровной поверхности при  $ka = \sqrt{2}\pi$  и  $\varphi = \arcsin(\xi_0/k) = 50^\circ$ .

Все изложенные здесь результаты получены для пилообразной поверхности, имеющей прямоугольные зубцы. Применяя метод, аналогичный изложенному в работе [3], можно получить соответственные результаты и для пилообразной поверхности, имеющей произвольные углы при вершинах.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Лапин. Об отражении нормальных волн от закрытого конца волновода. Акуст. ж., 1962, 8, 2, 189—193.
2. Л. В. Канторович, В. И. Крылов. Приближенные методы высшего анализа. М., ГТТИ, 1949.
3. А. Д. Лапин. К вопросу об отражении нормальных волн от закрытого конца волновода. Акуст. ж., 1962, 8, 4, 476—477.

Акустический институт АН СССР  
Москва

Поступила в редакцию  
19 января 1962 г.