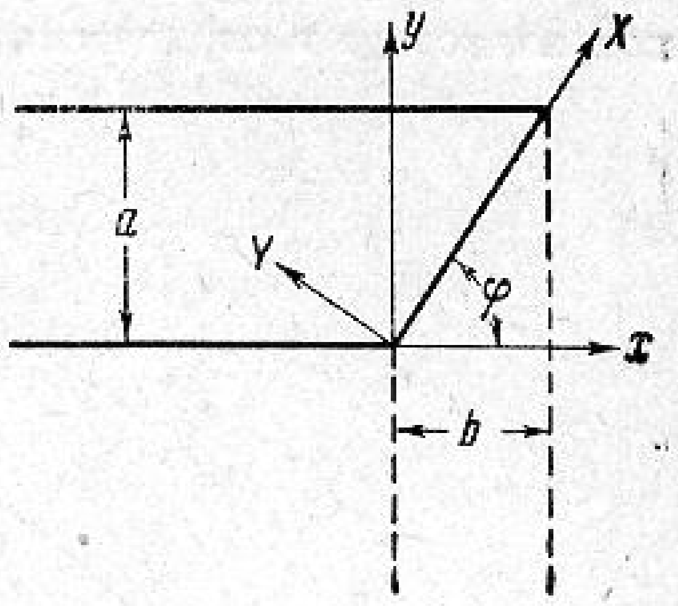
ОТРАЖЕНИЕ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН ОТ СКОШЕННОГО КОНЦА ПРЯМОУГОЛЬНОГО ВОЛНОВОДА

А. Д. Лапин

В работах [1, 2] было получено решение плоской задачи об отражении нормальных волн от конца прямоугольного волновода, закрытого жесткой или мягкой стенкой, расположенной под произвольным углом φ к его оси. В настоящей заметке дано обобщение этого решения на случай, когда стенка, закрывающая волновод, характеризуется реактивным импедансом Z. Боковые стенки волновода ($y = 0$ и $y = a$ на фиг. 1) будем считать абсолютно жесткими. Выберем в качестве падающего поля нормальную волну номера $r: p_0(x, y) = \exp(i\varkappa_r x)\cos(\xi_r y)$, где $\xi_r = r\pi/a$, $\varkappa_r = \sqrt{k^2 - \xi_r^2}$, k — волновое число. Отраженное поле p будем искать при $x < 0$ в виде суперпозиции нормальных волн $p(x, y) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n \exp(-i\varkappa_n x)\cos(\xi_n y)$, где A_n — неизвестные амплитуды.



Фиг. 1

Для нахождения поля p применим следующий прием. Рассмотрим сложный волновод, образованный сочленением под прямым углом исходного и вспомогательного волноводов (на фиг. 1 вспомогательный волновод обозначен пунктиром). Введем при $y < 0$ вспомогательное падающее $\widetilde{p}_0$ такое, чтобы при $Y = 0$ полное поле P удовлетворяло соотношению

$$\{P\}_{Y=0} + \frac{i}{k}\frac{Z}{\rho c}\left\{\frac{\partial P}{\partial Y}\right\}_{Y=0} = 0,$$

где ρ — плотность среды, заполняющей волновод, c — скорость звука в этой среде. Тогда задача о нахождении отраженного поля p сведется к задаче о дифракции поля

$$P_0 = \begin{cases} p_0 & \text{при } x < 0 \\ \widetilde{p}_0 & \text{при } y < 0 \end{cases} \quad \text{в сложном волноводе.}$$

В рассмотренных в работе [1] частных случаях $\varphi = 45°$, $Z = 0$ и $\varphi = 45°$, $Z = \infty$, вспомогательное поле $\widetilde{p}_0$ получается зеркальным отражением поля p_0 в плоскости $Y = 0$; теперь же это поле придется искать в виде суперпозиции нормальных волн $\widetilde{p}_0(x, y) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} M_n \exp(i\zeta_n y)\cos(\nu_n x)$, где $\nu_n = n\pi/b$, $\zeta_n = \sqrt{k^2 - \nu_n^2}$, M_n — амплитуды нормальных волн, определяемые из граничного условия при $Y = 0$.

Для решения задачи был применен метод, аналогичный изложенному в работах [1, 2]. В результате соответственных вычислений было найдено, что амплитуды отраженных нормальных волн A_n являются решением бесконечной системы алгебраических уравнений

$$\left.\begin{aligned} A_l &= \sum_{n=0}^{\infty} F_{n,l}(M_n - N_n) + \delta_{l,r}\exp(i2\varkappa_r b) \\ &\sum_{n=0}^{\infty} [(\delta_{n,r} - A_n) G_{n,l} - (M_n - N_n) H_{n,l}] = 0 \end{aligned}\right\},$$

где

$$F_{n,l} = \frac{2\alpha_{n,l}}{\theta_l a}\frac{\sin(\varkappa_l b)}{\sin(\zeta_n a)}\exp(i\varkappa_l b),$$

$$G_{n,l} = \left\{\frac{Z}{\rho c}[\widetilde{\mu}_{n,l}\varkappa_n \sin\varphi + \widetilde{\sigma}_{n,l}\xi_n \cos\varphi] + ik\widetilde{\lambda}_{n,l}\right\},$$

$$H_{n,l} = \left\{\frac{Z}{\rho c}[\mu_{n,l}\zeta_n \cos\varphi + \sigma_{n,l}\nu_n \sin\varphi] - ik\lambda_{n,l}\right\},$$

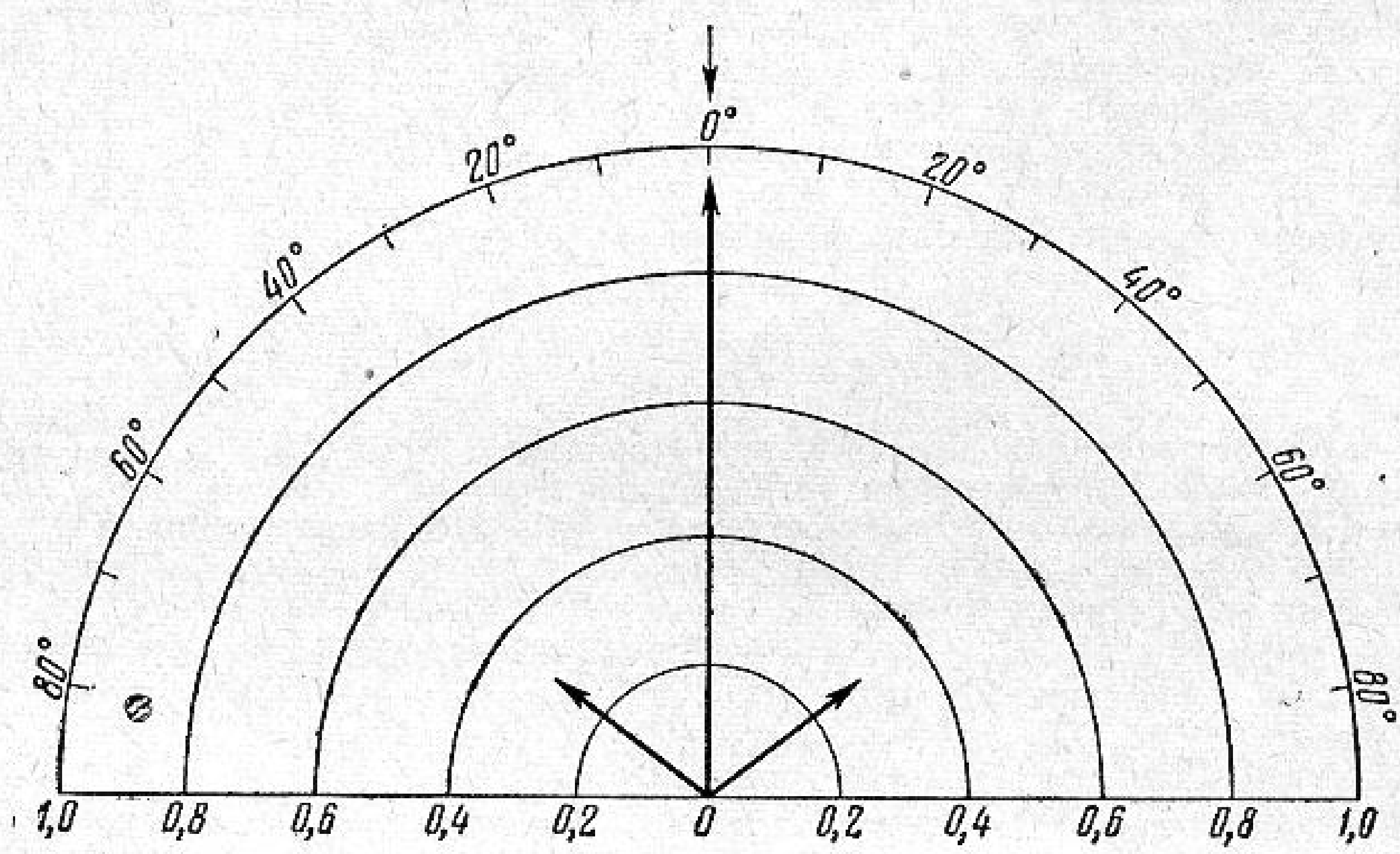
$$\lambda_{n,\,l}=\frac{(\alpha_{n,\,n-l}+\alpha_{n,\,n+l})}{\sin(\zeta_n a)},\quad \mu_{n,\,l}=\frac{(\gamma_{n,\,n-l}+\gamma_{n,\,n+l})}{\sin(\zeta_n a)},$$

$$\sigma_{n,\,l}=\frac{(\beta_{n,\,n-l}+\beta_{n,\,n+l})}{\sin(\zeta_n a)},\quad \beta_{n,\,l}=\frac{\xi}{\zeta_n}\gamma_{n,l},\quad \alpha_{n,\,l}=\begin{cases}(-1)^l\,\theta_l\,a/2 & \text{при } \zeta_n=\xi_l\\ \dfrac{\zeta_n\sin(\zeta_n a)}{(\zeta_n^2-\xi_l^2)} & \text{при } \zeta_n\neq\zeta_l\end{cases},$$

$$\gamma_{n,\,l}=\begin{cases}0 & \text{при } \zeta_n=\xi_l\\ \dfrac{\zeta_n}{(\zeta_n^2-\xi_l^2)}\left[(-1)^l-\cos(\zeta_n a)\right] & \text{при } \zeta_n\neq\xi_l\end{cases},$$

$$\delta_{n,\,l}=\begin{cases}1 & \text{при } n=l\\ 0 & \text{при } n\neq l,\end{cases}\qquad \theta_n=\begin{cases}2 & \text{при } n=0\\ 1 & \text{при } n\neq 0.\end{cases}$$

Здесь N_n — амплитуды нормальных волн, распространяющихся в вспомогательном волноводе в отрицательном направлении оси y. Величины $\tilde{\lambda}_{n,\,l}$, $\tilde{\mu}_{n,\,l}$, $\tilde{\sigma}_{nl}$ по-



Фиг. 2

лучаются соответственно из величин $\lambda_{n,\,l}$, $\mu_{n,\,l}$, $\sigma_{n,\,l}$ заменой в них ζ_n на $\varkappa_n \operatorname{ctg}\varphi$. Заметим, что аналогичные вычисления можно выполнить и для волновода с мягкими боковыми стенками. Тогда получим бесконечную систему алгебраических уравнений для амплитуд отраженных нормальных волн B_n. Бесконечные системы уравнений для A_n и B_n удобно решать численно редукционным методом.

Полученные решения A_n и B_n можно использовать для решения задачи о рассеянии плоской волны $p_0(x,y)=\exp[i(\varkappa_r x+\xi_r y)]$ на симметричной пилообразной поверхности с периодом $2a$, имеющей углы 2φ при вершинах и характеризующейся реактивным импедансем Z. Методом, аналогичным изложенному в работе [1], можно показать, что амплитуды рассеянных спектров R_n этой плоской волны связаны с амплитудами нормальных волн A_n и B_n соотношениями: $R_n=\frac{1}{2}(A_n+B_n)$, $R_{-n}=\frac{1}{2}(A_n-B_n)$. Величины $|R_n|$, рассчитанные указанным способом для случая $r=0$, $\varphi=45°$, $ka=4$ и $Z/\rho c=i9$, представлены на фиг. 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Лапин. Об отражении нормальных волн от закрытого конца волновода. Акуст. ж., 1962, 8, 2, 189—193.
2. А. Д. Лапин. К вопросу об отражении нормальных волн от закрытого конца волновода. Акуст. ж., 1962, 8, 4, 476—477.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступило в редакцию
10 октября 1962 г.