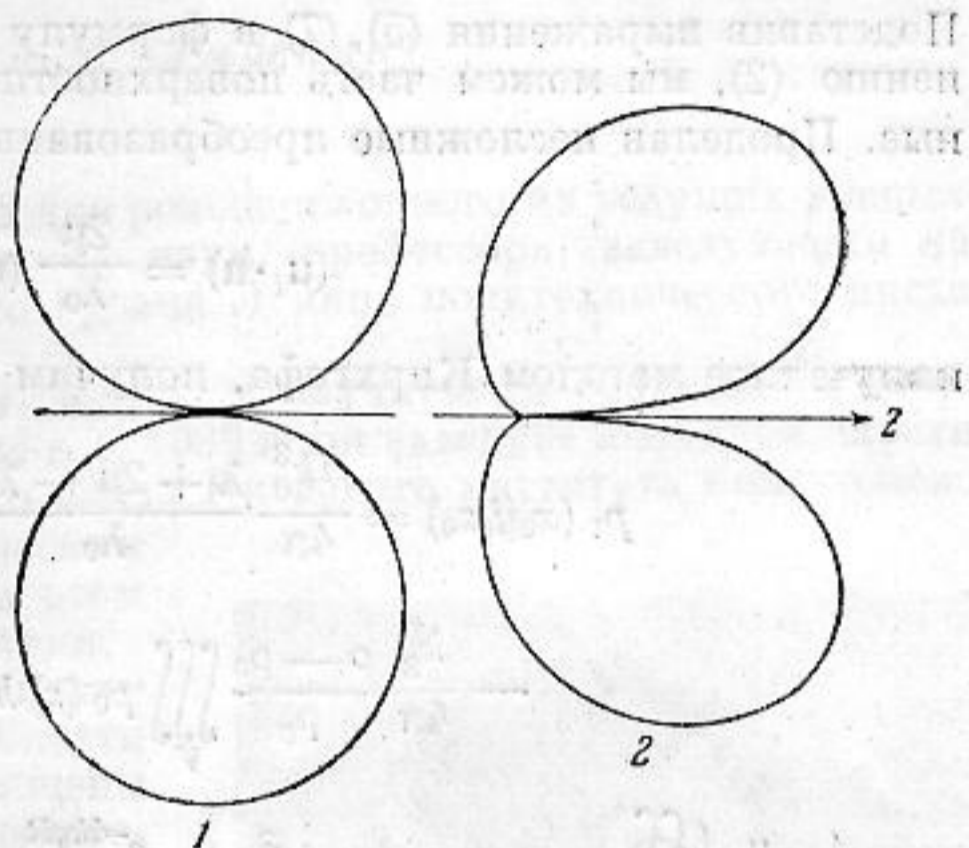


РАСSEЯНИЕ ЗВУКА НА ТЕЛАХ С МАЛЫМ МОДУЛЕМ СДВИГА, НАХОДЯЩИХСЯ В ЖИДКОСТИ

И. А. Чабан

С точки зрения гидроакустики интересно знать, как рассеивают звук биологические объекты: рыбы, медузы и так далее. Плотность и сжимаемость этих биологических объектов отличается лишь на малую величину от соответствующих параметров воды, но, в отличие от воды, они обладают также и небольшой сдвиговой упругостью. Рассеяние будет определяться, таким образом, не только отличием плотности и сжимаемости, но и малым модулем сдвига.

Задачу о рассеянии в данном случае нельзя решать методом малых возмущений, так как сдвиговые напряжения не малы по сравнению с давлением в падающей волне. Однако ее можно решить в предположении малости длины волны сдвига по сравнению с размерами объекта, что обычно выполняется для ультразвуковых частот, наиболее интересных с точки зрения рассеяния. Кроме того, поскольку затухание сдвиговых волн в живых тканях велико, то можно применить приближенный метод, аналогичный методу Кирхгофа [1, 2], а именно, граничные условия для сдвиговых волн в каждой точке поверхности тела можно писать так, как если бы граница была плоской. Оказывается, что в этом случае рассеянное поле можно выразить в виде объемных интегралов, пропорциональных малым величинам $\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}$ и $\frac{\lambda + 2\mu - \lambda_0}{\lambda_0}$ и поверхностного интеграла, пропорционального малой величине μ/λ_0 . Здесь λ, μ — постоянные Ламэ, величины с индексом 0 относятся к жидкости, величины без индекса относятся к биологическому объекту.



Пусть на объект падает плоская гармоническая волна, давление в которой равно $p_0(z) = p_0 e^{-ik_0 z}$, где k_0 — волновое число в жидкости. Смещение в такой волне равно $v_0(z) = v_0(z) e_z = v_0 e_z e^{-ik_0 z}$, где e_z — единичный вектор в направлении оси z .

Представим давление и смещение в жидкости в виде $p(\mathbf{r}) = p_0(z) + p_1(\mathbf{r})$, $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = v_0(z) + \mathbf{v}_1(\mathbf{r})$, где $p_1(\mathbf{r}), \mathbf{v}_1(\mathbf{r})$ — давление и смещение, создаваемое рассеянным полем. Аналогично представим смещение в упругом теле в форме $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = v_0(z) + \mathbf{u}_1(\mathbf{r})$, где $\mathbf{u}_1(\mathbf{r})$ — смещение, дополнительное к смещению в падающей волне. $\mathbf{u}_1(\mathbf{r})$ можно представить как $\mathbf{u}_1(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_{e_1}(\mathbf{r}) + \mathbf{u}_l(\mathbf{r})$, где $\mathbf{u}_{e_1}(\mathbf{r})$ — продольная часть дополнительного смещения в упругом теле, $\mathbf{u}_l(\mathbf{r})$ — поперечная часть.

Уравнение движения в жидкости имеет следующий вид:

$$\text{grad div } \mathbf{v} + k_0^2 \mathbf{v} = 0. \quad (1)$$

Уравнение для продольной части смещения в упругом теле запишем следующим образом:

$$\text{grad div } \mathbf{u}_l + k_0^2 \mathbf{u}_l = -4\pi Q_l, \quad (2)$$

где

$$Q_l = \frac{k_0^2}{4\pi} \left(-\frac{\lambda + 2\mu - \lambda_0}{\lambda_0} + \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right) v_0. \quad (3)$$

Применим формулу Грина [3] к уравнению (1). Это дает

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1(\mathbf{r}_0) = & \frac{1}{4\pi k_0^2} \iint_S \text{div } \mathbf{v}_1(\mathbf{r}) \text{ grad } \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ik_0 R}}{R} \right) dS + \\ & + \frac{1}{4\pi} \iint_S (\mathbf{v}_1(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}) \text{ grad } \left(\frac{e^{-ik_0 R}}{R} \right) dS, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}$, $R = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2}$, \mathbf{r}_0 — радиус-вектор точки наблюдения, \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали к поверхности упругого тела. Исполь-

зуем теперь граничные условия, т. е. равенство нормальных смещений и напряжений на границе между жидкостью и упругим телом.

$$(\mathbf{v}_1 \mathbf{n}) = (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}), \quad (5)$$

$$\lambda_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right). \quad (6)$$

Так как напряжения, создаваемые продольными и поперечными смещениями \mathbf{u}_l и \mathbf{u}_t , одного порядка, и поперечные колебания происходят под углом $\sqrt{\mu/\lambda}$ к нормали, то второе граничное условие можно записать следующим образом:

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_1 = \operatorname{div} \mathbf{u}_1 + \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} \operatorname{div} \mathbf{v}_0(z) - \frac{2\mu}{\lambda_0} i k_0 n_z^2 v_0(z). \quad (7)$$

Подставив выражения (5), (7) в формулу (4) и применив формулу Грина [3] к уравнению (2), мы можем часть поверхностных интегралов в (4) заменить через объемные. Прделав несложные преобразования и подставив вместо $(\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{n})$ выражение

$$(\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{n}) = \frac{2\mu}{\lambda_0} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_0(z)) (1 - n_z^2), \quad (8)$$

полученное методом Кирхгофа, получим

$$p_1(x_0 y_0 z_0) = \frac{i k_0^3}{4\pi} \frac{\lambda + 2\mu - \lambda_0}{\lambda_0} \iiint_V p_0(z) \cdot h_0(k_0 R) dx dy dz - \\ - \frac{k_0^3}{4\pi} \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \iiint_V p_0(z) h_1(k_0 R) P_1(\cos \theta) dx dy dz - \quad (9)$$

$$- \frac{1}{2\pi} \frac{\mu}{\lambda_0} \left\{ \iint_S p_0(z) (1 - n_z^2) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-i k_0 R}}{R} \right) dS - i k_0 \iint_S p_0(z) n_z (1 - n_z^2) \frac{e^{-i k_0 R}}{R} dS \right\},$$

где $h_n(k_0 R)$ — сферические функции Ханкеля, $P_n(\cos \theta)$ — полиномы Лежандра. При $\rho_0 = \rho$, $\lambda + 2\mu = \lambda_0$ выражение (9) дает рассеянную волну, возникающую вследствие наличия малого модуля сдвига

$$p_1(x_0 y_0 z_0) = - \frac{1}{2\pi} \frac{\mu}{\lambda_0} \left\{ \iint_S p_0(z) (1 - n_z^2) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-i k_0 R}}{R} \right) dS - \right. \\ \left. - i k_0 \iint_S p_0(z) \cdot n_z (1 - n_z^2) \frac{e^{-i k_0 R}}{R} dS \right\}. \quad (10)$$

При равенстве плотностей и сжимаемостей ($\rho_0 = \rho$, $\lambda + \frac{2}{3}\mu = \lambda_0$) в выражении (9), кроме составляющей (10), остается еще и объемный интеграл, пропорциональный μ/λ_0 , т. е. также обусловленный малым модулем сдвига.

В качестве примера приведем диаграммы направленности поля, рассчитанного по формуле (10), для случая, когда рассеивающее упругое включение имеет форму шара радиуса a (см. фигуру). Диаграммы направленности построены для случаев

$$k_0 a \ll 1, \quad p_1(x_0 y_0 z_0) = A \sin \theta \left(|A| = \frac{3\pi}{8} \frac{\mu}{\lambda_0} \frac{(k_0 a)^2}{k_0 R} p_0 \right) \quad (1)$$

$$\text{и} \quad k_0 a \gg 1, \quad p_1(x_0 y_0 z_0) = B \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^3 \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{1/2} \left(|B| = \sqrt{\pi} \frac{2\mu}{\lambda_0} \frac{(k_0 a)^{3/2}}{k_0 R} p_0 \right) \quad (2).$$

Любопытно отметить, что рассеяние под углами 0° и 180° в обоих случаях отсутствует.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Б р е х о в с к и х. Дифракция волн на неровной поверхности. I. Общая теория. Ж. эксп. и теор. физ., 1952 г. 23, 3, 275—288.
2. М. А. И с а к о в и ч. Рассеяние волн от статистически-шероховатой поверхности. Ж. эксп. и теор. физ., 1952, 23, 3, 305—314.
3. Ф. М. М о р с, Г. Ф е ш б а х. Методы теоретической физики. М., ИЛ, 1960, гл. 13.