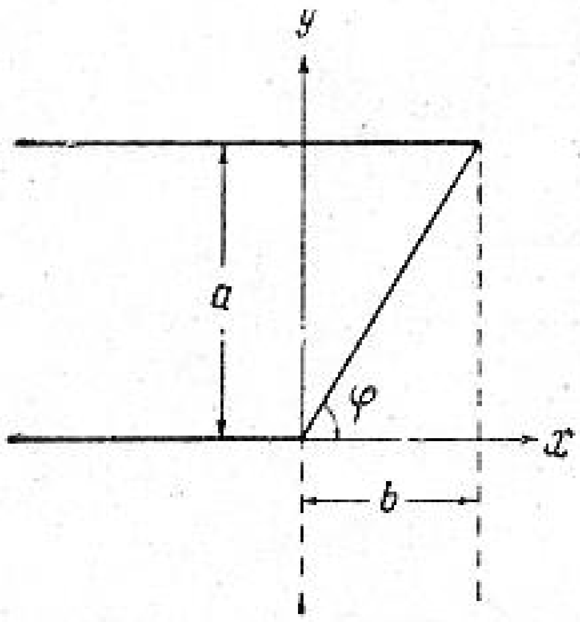
К ВОПРОСУ ОБ ОТРАЖЕНИИ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН ОТ ЗАКРЫТОГО КОНЦА ВОЛНОВОДА

А. Д. Лапин

В работе [1] была рассмотрена плоская задача об отражении нормальных волн от конца волновода, закрытого жесткой или мягкой перегородкой, расположенной под углом 45° к его оси. В настоящей работе получено обобщение этого решения на случай, когда перегородка расположена под произвольным углом φ к оси волновода (фиг. 1).

Будем считать, что волновод имеет жесткие стенки при $y=0$ и $y=a$. Выберем в качестве падающего поля нормальную волну номера r: $p_0(x,y)=e^{i\varkappa_r x}\cos(\xi_r\ y)$, где $\xi_r = r\pi/a$, $\varkappa_r=\sqrt{k^2-\xi_r^2}$. Отраженное поле p будем искать при $x<0$ в виде суммы



Фиг. 1

нормальных волн $p(x,y)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n e^{-i\varkappa_n x}\cos(\xi_n y)$, где A_n — неизвестные амплитуды. Кроме незатухающих нормальных волн ($n<ka/\pi$) в отраженном поле имеются также и затухающие (неоднородные) нормальные волны ($n>ka/\pi$). Неоднородные нормальные волны затухают экспоненциально при увеличении $|X|$, поэтому при достаточном удалении от закрытого конца волновода ими можно пренебречь.

Для нахождения поля p применим следующий прием. Рассмотрим сложный волновод, образованный сочленением под прямым углом исходного волновода и волновода, получающегося из него сжатием по высоте в $\operatorname{tg}\varphi$ раз (фиг. 1). Введем при $y<0$ вспомогательное падающее поле $\widetilde{p}_0$, такое, чтобы при $y=x\operatorname{tg}\varphi$ полное поле в волноводе имело или нулевую нормальную скорость (если перегородка жесткая), или нулевое давление (если перегородка мягкая). Тогда задача о нахождении отраженног поля p сведется к задаче о дифракции поля

$$P_0=\begin{cases} p_0 & \text{при} \quad x<0 \\ \widetilde{p}_0 & \text{при} \quad y<0 \end{cases}$$

в сложном волноводе. В рассмотренном в работе [1] частном случае $\varphi=45°$ вспомогательное поле $\widetilde{p}_0$ получается зеркальным отражением поля p_0 в плоскости $y=x$; теперь же это поле придется искать в виде суперпозиции нормальных волн

$$\widetilde{p}_0(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty} M_n e^{i\zeta_n y}\cos(\nu_n x),\ \text{где}\ \nu_n=n\pi/b;\ \zeta_n=\sqrt{k^2-\nu_n^2}\,;$$

M_n — амплитуды нормальных волн, определяемые из граничных условий при $y=x\operatorname{tg}\varphi$.

Для решения задачи применим метод, изложенный в работе [1]. Выполняя соответственные вычисления, получим, что амплитуды отраженных нормальных волн A_n являются решением бесконечной системы алгебраических уравнений

$$\left.\begin{aligned} A_l &= \sum_{n=0}^{\infty}(M_n-N_n)\,F_{n,l}+\delta_{l,r}e^{i(2\varkappa_l b)} \\ &\sum_{n=0}^{\infty}[(\delta_{n,r}-A_n)\,G_{n,l}-(M_n-N_n)\,H_{n,l}]=0 \end{aligned}\right\}, \qquad (1)$$

где

$$G_{n,l}=\begin{cases} [\widetilde{\mu}_{n,l}\varkappa_n\sin\varphi+\widetilde{\sigma}_{n,l}\xi_n\cos\varphi] & \text{для волновода с жесткой перегородкой} \\ \widetilde{\lambda}_{n,l} & \text{для волновода с мягкой перегородкой;} \end{cases}$$

$$H_{n,l}=\begin{cases} [\mu_{n,l}\zeta_n\cos\varphi+\sigma_{n,l}\nu_n\sin\varphi] & \text{для волновода с жесткой перегородкой} \\ -\lambda_{n,l} & \text{для волновода с мягкой перегородкой;} \end{cases}$$

$$\alpha_{n,l} = \begin{cases} \dfrac{(-1)^l \theta_l a}{2} & \text{при } \zeta_n = \xi_l \\ \dfrac{\zeta_n \sin(\zeta_n a)}{(\zeta_n^2 - \xi_l^2)} & \text{при } \zeta_n \neq \xi_l; \end{cases}$$

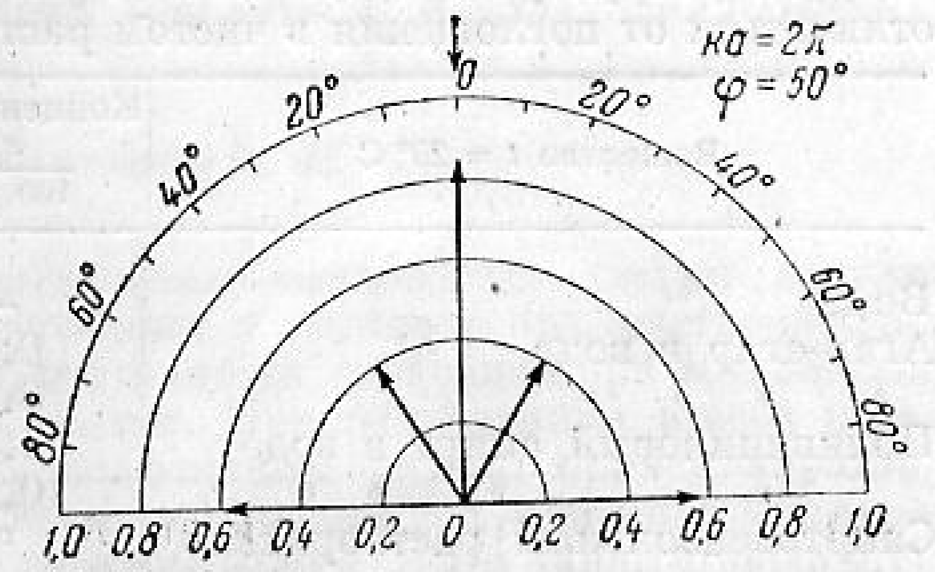
$$\gamma_{n,l} = \begin{cases} 0 & \text{при } \zeta_n = \xi_l \\ \dfrac{\zeta_n}{(\zeta_n^2 - \xi_l^2)} \left[(-1)^l - \cos(\zeta_n a)\right] & \text{при } \zeta_n \neq \xi_l; \end{cases}$$

$$F_{n,l} = \frac{2\alpha_{n,l}}{\theta_l a} \frac{\sin(\varkappa_l b)}{\sin(\zeta_n a)} e^{i\varkappa_l b}; \quad \lambda_{n,l} = \frac{\alpha_{n,n-l} + \alpha_{n,n+l}}{\sin(\zeta_n a)}; \quad \mu_{n,l} = \frac{\gamma_{n,n-l} + \gamma_{n,n+l}}{\sin(\zeta_n a)};$$

$$\sigma_{n,l} = \frac{\beta_{n,n-l} + \beta_{n,n+l}}{\sin(\zeta_n a)}; \quad \beta_{n,l} = \frac{\xi_l}{\zeta_n} \gamma_{n,l}; \quad \sigma_{n,l} = \begin{cases} 1 & \text{при } n = l \\ 0 & \text{при } n \neq l; \end{cases} \quad \theta_n = \begin{cases} 2 & \text{при } n = 0 \\ 1 & \text{при } n \neq 0; \end{cases}$$

N_n — амплитуды нормальных волн, распространяющихся в вспомогательном волноводе в отрицательном направлении оси y. Величины $\widetilde{\lambda}_{n,l}$; $\widetilde{\mu}_{n,l}$; $\widetilde{\sigma}_{n,l}$ получаются соответственно из величин $\lambda_{n,l}$; $\mu_{n,l}$; $\sigma_{n,l}$ заменой в них ζ_n на $\varkappa_n \operatorname{ctg} \varphi$.

Все предыдущие вычисления были сделаны для волновода с жесткими стенками. Аналогичные вычисления можно выполнить и для волновода с мягкими стенками. В этом случае для амплитуд отраженных нормальных волн B_n получается бесконечная система алгебраических уравнений, аналогичная (1). Бесконечные системы уравнений для амплитуд отраженных нормальных волн удобно решать численно редукционным методом [2].



Фиг. 2

Полученные решения A_n и B_n можно использовать для нахождения решения задачи о рассеянии плоской волны

$$p_0(x, y) = \exp\left[i(\varkappa_r x + \xi_r y)\right]$$

на симметричной пилообразной поверхности с периодом $2a$, имеющей угол 2φ при вершинах. Представляя рассеянное поле этой волны в виде суперпозиции плоских волн (спектров)

$$p(x, y) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \exp\left[i(-\varkappa_n x + \xi_n y)\right],$$

получим, что амплитуды рассеянных спектров R_n связаны с амплитудами нормальных волн A_n и B_n соотношениями:

$$R_n = \frac{1}{2}(A_n + B_n), \quad R_{-n} = \frac{1}{2}(A_n - B_n).$$

Эти формулы позволяют найти амплитуды всех рассеянных спектров, в том числе и спектров, скользящих вдоль неровной поверхности.

На фиг. 2 представлены амплитуды спектров рассеянного поля, рассчитанные указанным способом для мягкой неровной поверхности при $r = 0, ka = 2\pi$ и $\varphi = 50°$. Согласно работе [1] при $\varphi = 45°$ и тех же значениях других параметров амплитуды рассеянных спектров равны $R_0 = R_2 = R_{-2} = 1$; $R_1 = R_{-1} = 0$. Из сравнения результатов для $\varphi = 45°$ и $\varphi = 50°$ видно, что небольшое изменение угла наклона неровной поверхности сильно влияет на структуру рассеянного поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Лапин. Об отражении нормальных волн от закрытого конца волновода. Акуст. ж., 1962, 8, 2, 189—193.
2. Л. В. Канторович, В. И. Крылов. Приближенные методы высшего анализа. М., ГТТИ, 1949.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступило в редакцию
15 декабря 1951 г.