

О ВОЗБУЖДЕНИИ ВОЛН НАД ПЛОСКОЙ ГРЕБЕНЧАТОЙ СТРУКТУРОЙ

М. Д. Хаскинд

В статье [1] рассматривается одна из приближенных постановок задачи о возбуждении поверхностных двумерных звуковых волн над плоской прямолинейной гребенчатой структурой. Решение этой задачи отыскивается при помощи интегральных разложений Фурье и последующих асимптотических оценок. Между тем, метод, вытекающий из свойств специальной функциональной комбинации, развитый в [2, 3], позволяет установить простую и эффективную форму решения не только в двумерном случае, но также и в более сложном трехмерном случае. Дальнейшее изложение иллюстрирует высказанные соображения.

1. Пусть функция  $\varphi(x, y, z)$ , удовлетворяющая волновому уравнению, является звуковым потенциалом поля над импедантной плоскостью  $z = 0$ , где фактор времени  $\exp i\omega t$  опускается. Тогда, как известно, на импедантной плоскости  $z = 0$  имеем условие:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} + p\varphi = 0 \quad (p > 0). \tag{1}$$

При этом для частой гребенчатой структуры  $p = k \operatorname{tg} kl$ , где  $l$  — высота гребенки,  $k$  — волновое число в свободном пространстве.

Следуя [2, 3], введем в рассмотрение специальную функциональную комбинацию

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} + p\varphi = \frac{\partial f}{\partial z}, \tag{2}$$

где функция  $f$ , так же как и  $\varphi$ , удовлетворяет волновому уравнению и в соответствии с (1) условию

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = 0, \tag{3}$$

позволяющему продолжить функцию  $f$  в нижнее полупространство четным образом. Вследствие этого функция  $f$  является регулярной и однозначной во всем пространстве вне поверхности  $S + S^*$ , где внутри поверхности  $S$  расположены источники поля, а  $S^*$  — зеркальное отражение поверхности  $S$  в нижнем полупространстве.

Если функция  $f(x, y, z)$  определена, то, как показано в [2, 3], обратный переход к функции  $\varphi(x, y, z)$  с учетом асимптотики определяется единственным образом и в трехмерном случае мы имеем одну из следующих формул перехода:

$$\varphi = e^{-pz} \int_{-\infty}^z e^{p\zeta} \frac{\partial f}{\partial \zeta} d\zeta + \varphi_0, \quad \varphi_0 = \frac{ip}{4} \int_{S+S^*} \left( \frac{\partial f}{\partial n} g_1 - f \frac{\partial g_1}{\partial n} \right) dS, \tag{4}$$

$$g_1 = e^{-p(z-\zeta)} H_0^{(2)}(hr_1) \quad (r_1 = ((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2)^{1/2}, h^2 = k^2 + p^2), \tag{5}$$

где  $H_0^{(2)}(x)$  — функция Ханкеля 2-го рода и интегрирование в первой из формул (4) проводится вдоль прямой  $(-\infty, z)$ , не пересекающей поверхность  $S + S^*$ , причем функция  $\varphi_0$  в этой формуле определяет поверхностные волны, возбуждаемые на импедантной плоскости  $z = 0$ .

Для двумерного поля, возбуждаемого источниками, заключенными внутри цилиндрической поверхности  $S$ , образующая которой параллельна оси  $x$ , функции  $\varphi$  и  $f$  зависят только от  $y$  и  $z$  и формулы перехода (4) и (5) принимают вид:

$$\varphi = e^{-pz} \int_{-\infty}^z e^{p\xi} \frac{\partial f}{\partial \xi} d\xi + B(\pm h, p) e^{-pz \mp ihy}, \quad (6)$$

$$B(\pm h, p) = \frac{ip}{2h} \int_{L+L^*} e^{pz \pm ihy} \left[ \frac{\partial f}{\partial n} - f(\pm ih \cos(n, y) + p \cos(n, z)) \right] dl, \quad (7)$$

где  $L + L^*$  — поперечный контур цилиндрической поверхности  $S + S^*$ ; верхний знак берется для точек, расположенных правее контура  $L + L^*$ , а нижний — для точек, находящихся левее его. Как видно, функция  $B(\pm h, p)$  представляет собой комплексную амплитуду плоских поверхностных волн, расходящихся по обе стороны от контура  $L$ .

2. Рассмотрим плоскую прямолинейную гребенчатую структуру, на участке  $(-a, a)$  которой расположены возбуждающие элементы при  $z = -l$ . В этом случае функция  $\varphi(y, z)$  удовлетворяет условию:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} + p\varphi = v(y) \sec kl \text{ при } z = 0, \quad (8)$$

где  $v(y)$  — комплексная амплитуда нормальной скорости возбуждающих элементов, отличная от нуля только при  $|y| < a$ .

Очевидно, что функция  $f(y, z)$  сразу определяется и мы имеем

$$f(y) = \frac{i}{2} \int_{-a}^a \frac{\partial f^+}{\partial z} H_0^{(2)}(k((y-s)^2 + z^2)^{1/2}) ds \quad \left( \frac{\partial f^+}{\partial z} = v \sec kl \right). \quad (9)$$

В то же время, стягивая контур  $L + L^*$  к отрезку  $(-a, a)$  оси  $y$ , находим

$$B(\pm h, p) = \frac{ip}{h} \int_{-a}^{+a} \frac{\partial f^+}{\partial z} e^{\pm ihy} dy \quad (10)$$

и, таким образом, при помощи (6), (9) и (10) получаем полное и, вместе с тем, простое решение этой задачи при произвольном распределении  $v(y)$ .

Пусть теперь импедансная плоскость реализуется при помощи кольцевой гребенчатой структуры. Тогда при тех же предпосылках легко установить соотношение (8), где функция  $v$  отлична от нуля только на  $S_0$ . Здесь также функция  $f(x, y, z)$  легко определяется:

$$f = -\frac{1}{2\pi} \int_{S_0} \frac{\partial f^+}{\partial z} \frac{e^{-ikr}}{r} dS_0 \quad (r^2 = r_1^2 + z^2, \quad r_1^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2). \quad (11)$$

Стягивая затем поверхность  $S + S^*$  к  $S_0$ , получаем

$$\varphi_0 = \frac{ip}{2} e^{-pz} \int_{S_0} \frac{\partial f^+}{\partial z} H_0^{(2)}(hr_1) dS_0. \quad (12)$$

Асимптотика этого выражения приводит к соотношению:

$$\varphi_0 = \frac{ipQ(h, \theta)}{(2\pi hr_0)^{1/2}} e^{-pz - i(hr_0 - \pi/4)} \left( r_0 = (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad \text{tg } \theta = \frac{y}{x} \right), \quad (13)$$

$$Q(h, \theta) = \int_{S_0} \frac{\partial f^+}{\partial z} e^{ih(x \cos \theta + y \sin \theta)} dS_0, \quad (14)$$

где  $Q(h, \theta)$  — асимптотическая характеристика возбуждаемых поверхностных волн.

В качестве примера рассмотрим простейшее осесимметричное возбуждение, полагая, по аналогии с двумерным случаем [1]

$$v = v_0 J_0(\alpha r/a) \text{ при } 0 < r < a \text{ и } v = 0 \text{ при } r > a, \quad (15)$$

где  $J_0(x)$  — функция Бесселя нулевого порядка и  $a$  — корень уравнения  $J_1(\alpha) = 0$ . Такое задание функции  $v$  соответствует колебаниям тонкой круговой пластинки в свободном пространстве, заземленной при  $r = a$ , и может рассматриваться как первое приближение для нормальной скорости  $v$  в данной задаче.

Учитывая равенства

$$\int_0^{2\pi} e^{ih \cos u} du = 2\pi J_0(hr), \quad \int_0^1 x J_0(\alpha x) J_0(\beta x) dx = \frac{\beta J_1(\beta) J_0(\alpha)}{\beta^2 - \alpha^2}, \quad (16)$$

получаем

$$Q = 2\pi v_0 a^2 \sec kl \frac{\beta J_1(\beta) J_0(\alpha)}{\beta^2 - \alpha^2}, \quad (17)$$

при этом при «резонансе» ( $\beta \rightarrow \alpha$ ) находим предельное выражение:

$$Q = \pi v_0 a^2 \sec kl J_0^2(\alpha). \quad (18)$$

3. Коснемся еще электромагнитной аналогии. При возбуждении двумерного поля  $E$ -волн над импедантной плоскостью имеем граничное условие:

$$E_y = i\rho_0 Z H_x \text{ при } z = 0 \left( \rho_0 = \left( \frac{\mu_0}{\epsilon_0} \right)^{1/2} = 120 \pi \text{ ом} \right), \quad (19)$$

где для гребенчатой структуры  $Z = \operatorname{tg} kl$ .

Электромагнитное поле, возбуждаемое над плоскостью  $z = 0$ , определим при помощи соотношений  $\mathbf{E} = -ik\rho_0 \operatorname{rot} \mathbf{\Pi}_m$ ,  $\mathbf{H} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{\Pi}_m + k^2 \mathbf{\Pi}_m$ , где магнитный вектор Герца  $\mathbf{\Pi}_m$  ориентируем вдоль оси  $x$ , полагая  $\mathbf{\Pi}_m = \varphi(y, z) \mathbf{x}^0$  ( $\mathbf{x}^0$  — единичный вектор оси  $x$ ) и в результате этого получаем

$$\mathbf{E} = -ik\rho_0 (\operatorname{grad} \varphi \times \mathbf{x}^0), \quad H_x = k^2 \varphi, \quad H_y = H_z = 0. \quad (20)$$

Скалярная функция  $\varphi(y, z)$  удовлетворяет волновому уравнению и, согласно (19) и (20), граничному условию

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} + p\varphi = 0 \text{ при } z = 0 \text{ (} p = kZ \text{)}. \quad (21)$$

Пусть участок  $(-a, a)$  гребенчатой структуры является открытым, на котором приложено заданное поле  $E_y = E_s(y)$  при  $z = -l$ . Тогда, принимая, как и обычно, что поле в канавках при  $-l < z < 0$  характеризуется функцией  $\varphi_i = C_1 \exp ikz + C_2 \exp(-ikz)$ , нетрудно установить

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} + p\varphi = \frac{i}{k\rho_0} E_s \sec kl \text{ при } z = 0 \text{ } |y| < a. \quad (22)$$

Если же мы имеем круговую кольцевую гребенчатую структуру, то в этом трехмерном случае импедантные граничные условия в полярной системе координат имеют вид:

$$[E_r = -i\rho_0 Z H_\theta, \quad E_\theta = i\rho_0 Z H_r \text{ при } z = 0. \quad (23)$$

Поле  $E$ -волн определяем при помощи электрического вектора Герца  $\Pi_e = \varphi(x, y, z) \mathbf{z}^0$  ( $\mathbf{z}^0$  — единичный вектор оси  $z$ ) и мы находим

$$H_r = \frac{ik}{\rho_0} \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta}, \quad H_\theta = -\frac{ik}{\rho_0} \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad H_z = 0,$$

$$E_r = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right), \quad E_\theta = \frac{\partial}{r \partial \theta} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right), \quad E_z = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + k^2 \varphi. \quad (24)$$

При наличии открытой части ( $a < r < b$ ) гребенчатой структуры, на которой при  $z = -l$  задано поле  $E_r^i$  ( $E_\theta^i = 0$ ), т. е. задано значение  $v_i = \partial \varphi_i / \partial z$ , получаем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} + p \varphi = v_i \sec kl \text{ при } z = 0, a < r < b \text{ и } v_i = 0 \text{ при } r > b \quad (25)$$

$$(p = kZ = k \operatorname{tg} kl).$$

Таким образом, мы видим, что в электромагнитном варианте такая приближенная постановка соответствует волноводному возбуждению поверхностных волн над гребенчатой структурой, причем открытая часть плоского или круглого волновода «охвачена» гребенкой и в качестве первого приближения структура поля у открытого конца принимается такой же, как и в бесконечном волноводе (приближение Кирхгофа).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гуань Дин-хуа. К теории возбуждения поверхностных звуковых волн. Акуст. ж., 1961, 7, 2, 181—184.
2. М. Д. Хаскинд. Распространение звуковых и электромагнитных волн в полупространстве. Акуст. ж., 1959, 5, 4, 464—471.
3. М. Д. Хаскинд. Возбуждение поверхностных электромагнитных волн на плоских диэлектрических покрытиях. Радиотехника и электроника, 1960, 5, 2, 188—197.

Одесский электротехнический  
институт связи

Поступила в редакцию  
10 октября 1960 г.