АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

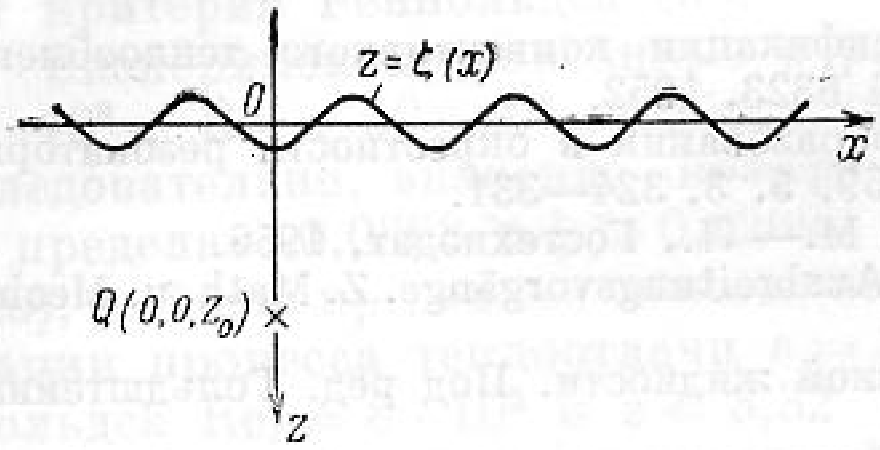
Том VII 1961 Вып. 3

О ПОЛЕ ТОЧЕЧНОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ В СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ, ОГРАНИЧЕННОЙ НЕРОВНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Ю. П. Лысанов

В приближении метода малых возмущений получено интегральное представление поля точечного источника, расположенного в слоисто-неоднородной среде, ограниченной пологой синусоидальной поверхностью.

Найдем в приближении метода малых возмущений поле точечного излучателя, расположенного в неоднородной среде, показатель преломления n которой является функцией только вертикальной координаты z. Сверху неоднородная среда ограничена неровной поверхностью, уравнение которой имеет вид $z = \zeta(x)$ (см. фигуру). Источник расположен в точке $(0, 0, z_0)$.



Будем характеризовать поле точечного источника потенциалом скоростей $\varphi(x, y, z)$, который должен удовлетворять:

а) в области $z > \zeta(x)$ волновому уравнению

$$\Delta\varphi + k_0^2 n^2(z)\,\varphi = -4\pi\delta_3(R), \qquad (1)$$

где k_0 — волновое число при $z = z_0$, $\delta_3(R) = \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z - z_0)$ — трехмерная дельта-функция, $R = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2}$;

б) граничному условию при $z = \zeta(x)$. Предположим, что неровная поверхность является свободной и на ней выполняется условие

$$\varphi(x, y, \zeta) = 0; \qquad (2)$$

в) при $z \to \infty$ поле должно иметь характер уходящих на бесконечность волн.

Временная зависимость поля определяется множителем $e^{-i\omega t}$, который в дальнейшем будем опускать.

Выберем уравнение неровной поверхности в виде $\zeta(x) = b\cos qx$, причем будем предполагать, что $k_0 b \ll 1$ и $q b \ll 1$. В этом случае для решения задачи можно воспользоваться методом малых возмущений. Перенесем граничные условия, заданные на поверхности $z = \zeta(x)$, на плоскость $z = 0$, разлагая $\varphi(x, y, \zeta)$ по степеням ζ:

$$\varphi(x, y, \zeta) = \varphi(x, y, 0) + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_0 \zeta + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)_0 \zeta^2 + \ldots = 0. \qquad (3)$$

Индекс 0 означает, что производная вычисляется при $z = 0$. Рассматривая действие неровностей, как малое возмущение, разложим $\varphi(x, y, z)$ в ряд по степеням $k_0 b$:

$$\varphi(x, y, z) = \varphi_0(x, y, z) + \varphi_1(x, y, z) + \varphi_2(x, y, z) + \ldots, \qquad (4)$$

где m-ое приближение $\varphi_m \sim (k_0 b)^m \cdot \varphi_0(x, y, z)$ соответствует полю, создаваемому точечным источником в рассматриваемой среде, если бы она была ограничена плоскостью. Подставляя ряд (4) в уравнение (1) и в граничное условие (3) и собирая вместе члены одинакового порядка по $k_0 b$, получаем для каждого приближения отдельно свое уравнение:

$$\Delta\varphi_0 + k_0^2 n^2(z)\varphi_0 = -4\pi\delta_3(R), \tag{5}$$

$$\Delta\varphi_m + k_0^2 n^2(z)\varphi_m = 0 \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots) \tag{6}$$

и граничное условие на плоскости $z = 0$

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_0(x, y, 0) = 0 \\ &\varphi_1(x, y, 0) + \left(\frac{\partial\varphi_0(x, y, z)}{\partial z}\right)_0 \zeta = 0 \\ &\varphi_2(x, y, 0) + \left(\frac{\partial\varphi_1(x, y, z)}{\partial z}\right)_0 \zeta + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi_0(x, y, z)}{\partial z^2}\right)_0 \zeta^2 = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{7}$$

Решение уравнений (5) и (6) будем искать в виде

$$\varphi_0(x, y, z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int F_{00}(z, \xi, \eta)\, e^{i\xi x + i\eta y}\, d\xi\, d\eta, \tag{8}$$

$$\varphi_1(x, y, z) = \frac{1}{2\pi}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int F_{11}(z, \xi, \eta)\, e^{i(\xi+q)x + i\eta y}\, d\xi\, d\eta + \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int F_{-11}(z, \xi, \eta)\, e^{i(\xi-q)x + i\eta y}\, d\xi\, d\eta\right], \tag{9}$$

$$\varphi_2(x, y, z) = \frac{1}{2\pi}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int F_{02}(z, \xi, \eta)\, e^{i\xi x + i\eta y}\, d\xi\, d\eta + \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int F_{22}(z, \xi, \eta)\, e^{i(\xi+2q)x + i\eta y}\, d\xi\, d\eta + \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int F_{-22}(z, \xi, \eta)\, e^{i(\xi-2q)x + i\eta y}\, d\xi\, d\eta\right]. \tag{10}$$

У функций $F_{lm}(z, \xi, \eta)$ первый индекс (l) соответствует множителю при q в показателе экспоненты, второй (m) — порядку приближения.

Функции $F_{00}(z, \xi, \eta)$ и $F_{lm}(z, \xi, \eta)$ удовлетворяют соответственно уравнениям

$$\frac{d^2 F_{00}(z, \xi, \eta)}{dz^2} + [k_0^2 n^2(z) - \xi^2 - \eta^2]\, F_{00}(z, \xi, \eta) = -2\delta(z - z_0), \tag{11}$$

$$\frac{d^2 F_{lm}(z, \xi, \eta)}{dz^2} + [k_0^2 n^2(z) - (\xi + lq)^2 - \eta^2]\, F_{lm}(z, \xi, \eta) = 0 \tag{12}$$

и граничным условиям при $z = 0$:

$$F_{00}^{-}(0, \xi, \eta) = 0, \tag{13}$$

$$F_{\pm 11}(0, \xi, \eta) = -\frac{b}{2}\left(\frac{dF_{00}^{-}}{dz}\right)_0, \tag{14}$$

$$F_{\pm 22}(0, \xi, \eta) = -\frac{b}{2}\left(\frac{dF_{\pm 11}}{dz}\right)_0 - \frac{b^2}{8}\left(\frac{d^2 F_{00}^{-}}{dz^2}\right)_0, \tag{15}$$

$$F_{02}(0, \xi, \eta) = -\frac{b}{2}\left(\frac{dF_{11}}{dz} + \frac{dF_{-11}}{dz}\right)_0 - \frac{b^2}{4}\left(\frac{d^2 F_{00}^{-}}{dz^2}\right)_0. \tag{16}$$

Функция $F_{00}(z, \xi, \eta)$ должна удовлетворять при $z = z_0$ следующим условиям:

$$F_{00}^{+}(z_0, \xi, \eta) = F_{00}^{-}(z_0, \xi, \eta), \tag{17}$$

$$\left(\frac{dF_{00}^{+}}{dz}\right)_{z=z_0} - \left(\frac{dF_{00}^{-}}{dz}\right)_{z=z_0} = -2\,. \tag{18}$$

В формулах (13)—(18) через $F_{00}^{-}(z, \xi, \eta)$ обозначена функция $F_{00}(z, \xi, \eta)$ при $z < z_0$ и через $F_{00}^{+}(z, \xi, \eta)$ — при $z > z_0$. Предположим, что нам известны точные или приближенные решения уравнений (11) и (12). Обозначим два линейно-независимых решения этих уравнений через

$$\Phi_1(z, \xi + lq, \eta), \qquad \Phi_2(z, \xi + lq, \eta), \tag{19}$$

причем последнее решение соответствует при $z \to \infty$ уходящей в бесконечность волне. Тогда

$$F_{00}^{-}(z, \xi, \eta) = A\Phi_1(z, \xi, \eta) + B\Phi_2(z, \xi, \eta), \tag{20}$$

$$F_{00}^{+}(z, \xi, \eta) = C\Phi_2(z, \xi, \eta), \tag{21}$$

$$F_{lm}(z, \xi, \eta) = D\Phi_2(z, \xi, \eta). \tag{22}$$

Для сокращения записи в аргументе функций Φ_1 и Φ_2 временно опустим ξ и η за исключением того случая, когда ξ входит в виде комбинации $\xi + lq$. Так, $\Phi_1(z)$ означает $\Phi_1(z, \xi, \eta)$, а $\Phi_1(z, \xi + lq)$ — $\Phi_1(z, \xi + lq, \eta)$ и так далее.

Постоянные A, B, C и D будут определены, когда мы подставим выражения (20)—(22) в уравнения (13)—(18). После простых преобразований получаем

$$F_{00}^{-}(z, \xi, \eta) = \frac{2}{W}\,\frac{\Phi_2(z_0)}{\Phi_2(0)}\,[\Phi_1(0)\,\Phi_2(z) - \Phi_2(0)\,\Phi_1(z)], \tag{23}$$

$$F_{00}^{+}(z, \xi, \eta) = \frac{2}{W}\,\frac{\Phi_2(z)}{\Phi_2(0)}\,[\Phi_1(0)\,\Phi_2(z_0) - \Phi_2(0)\,\Phi_1(z_0)], \tag{24}$$

$$F_{\pm 11}(z, \xi, \eta) = -b\,\frac{\Phi_2(z_0)\,\Phi_2(z, \xi \pm q)}{\Phi_2(0)\,\Phi_2(0, \xi \pm q)}, \tag{25}$$

$$F_{\pm 22}(z, \xi, \eta) = \frac{b^2}{2}\,\frac{\Phi_2(z_0)\,\Phi_2(z, \xi \pm 2q)\,\Phi_2'(0, \xi \pm q)}{\Phi_2(0)\,\Phi_2(0, \xi \pm 2q)\,\Phi_2(0, \xi \pm q)}, \tag{26}$$

$$F_{02}(z, \xi, \eta) = \frac{b^2}{2}\,\frac{\Phi_2(z_0)\,\Phi_2(z)}{\Phi_2(0)\,\Phi_2(0)}\left[\frac{\Phi_2'(0, \xi + q)}{\Phi_2(0, \xi + q)} + \frac{\Phi_2'(0, \xi - q)}{\Phi_2(0, \xi - q)}\right]. \tag{27}$$

Через W обозначен вронскиан

$$W = \Phi_1(z_0)\,\Phi_2'(z_0) - \Phi_1'(z_0)\,\Phi_2(z_0); \quad \Phi_{1,2}'(z, \xi, \eta) \equiv \frac{d}{dz}\Phi_{1,2}(z, \xi, \eta).$$

Подставив выражение (23)—(27) в формулы (8)—(10) и сделав в интегралах (9)—(10) замену переменной, мы можем записать выражение для полного поля с учетом второго приближения в виде одного интеграла:

$z > z_0$

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \frac{\Phi_2(z, \xi, \eta)}{\Phi_2(0, \xi, \eta)}\,S_1(\xi, \eta)\,e^{i\xi x + i\eta y}\,d\xi\,d\eta \tag{28}$$

$z < z_0$

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int \left[\frac{\Phi_2(z, \xi, \eta)}{\Phi_2(0, \xi, \eta)} S_2(\xi, \eta) - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{W} \Phi_2(z_0, \xi, \eta) \Phi_1(z, \xi, \eta) \right] e^{i\xi x + i\eta y} \, d\xi \, d\eta, \tag{29}$$

где

$$S_{1\,(0,\eta)} = \frac{2}{W} [\Phi_{1(0,\xi,\eta)} \Phi_2(z_0, \xi, \eta) - \Phi_2(0, \xi, \eta) \Phi_1(z, \xi, \eta)] -$$

$$- b \left[\frac{\Phi_2(z_0, \xi + q, \eta)}{\Phi_2(0, \xi + q, \eta)} + \frac{\Phi_2(z_0, \xi - q, \eta)}{\Phi_2(0, \xi - q, \eta)} \right] +$$

$$+ \frac{b^2}{2} \left[\frac{\Phi_2(z_0, \xi + 2q, \eta) \Phi_2'(0, \xi + q, \eta)}{\Phi_2(0, \xi + 2q, \eta) \Phi_2(0, \xi + q, \eta)} + \frac{\Phi_2(z_0, \xi - 2q, \eta) \Phi_2'(0, \xi - q, \eta)}{\Phi_2(0, \xi - 2q, \eta) \Phi_2(0, \xi - q, \eta)} \right] +$$

$$+ \frac{\Phi_2(z_0, \xi, \eta)}{\Phi_2(0, \xi, \eta)} \left(\frac{\Phi_2'(0, \xi + q, \eta)}{\Phi_2(0, \xi + q, \eta)} + \frac{\Phi_2'(0, \xi - q, \eta)}{\Phi_2(0, \xi - q, \eta)} \right);$$

$$S_2(\xi, \eta) = S_1(\xi, \eta) + \frac{2}{W} \Phi_2(0, \xi, \eta) \Phi_1(z_0, \xi, \eta).$$

Формулы (28)—(29) дают интегральное представление поля точечного источника, расположенного в слоисто-неоднородной среде, ограниченной пологой синусоидальной поверхностью. Можно предполагать, что на их основе могут быть исследованы частные случаи для различных функций $n(z)$.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
9 декабря 1960 г.